

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский
регион*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2019

4

Редакционная коллегия:

В.Е. Закруткин – председатель редколлегии, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.А. Бабешко – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, Кубанский государственный университет, Россия
Б.С. Карамурзов – доктор техн. наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия
В.И. Колесников – академик РАН, доктор техн. наук, профессор, Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия
Ю.Ф. Коробейник – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.Г. Кусраев – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный математический институт ВЦ РАН, Россия
Г.Г. Матишов – академик РАН, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный научный центр РАН, Россия
В.И. Минкин – академик РАН, доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
М.Х. Рабаданов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Дагестанский государственный университет, Россия
Э.З. Эмирбеков – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.Н. Труфанов – зам. председателя редколлегии, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.В. Абанин – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
О.С. Безуглова – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Н.И. Бойко – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.В. Бочкарев – доктор геол.-мин. наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Россия
В.В. Внуков – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Л.С. Ворович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
О.Н. Демина – доктор биол. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия
А.Г. Захаров – доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Л.М. Зубов – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Я.М. Ерусалимский – зам. председателя редколлегии, кандидат физ.-мат. наук, доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
М.И. Карякин – доктор физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
С.Б. Климентов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.И. Колесников – кандидат геогр. наук, доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Г.В. Куповых – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.В. Курбатов – доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.М. Лерер – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.А. Миноранский – доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.В. Онищенко – доктор геогр. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия
О.В. Назаренко – кандидат геогр. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
Г.В. Пироговская – доктор с.-х. наук, профессор, Институт почвоведения и агрохимии НАН РБ, Белоруссия
В.С. Рабинович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Национальный политехнический институт, Мексика
А.К. Сагателян – доктор геол.-мин. наук, Центр эколого-ноосферных исследований НАН РА, Армения
Э.С. Сианисян – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Ю.А. Устинов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
П. Фатталь – доктор наук, профессор, Университет Нанта, Франция
Ю.А. Федоров – доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.Д. Хованский – кандидат геол.-мин. наук, доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Е.А. Шинкаренко – ответственный секретарь журнала, Южный федеральный университет, Россия
Т.А. Ватульян – ответственный секретарь по издательской деятельности журнала, Южный федеральный университет, Россия

Учредители:

Дагестанский государственный технический университет,
Дагестанский государственный университет,
Донской государственный технический университет,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Кубанский государственный технологический университет,
Ростовский государственный университет путей сообщения,
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова,
Южный федеральный университет

Над номером работали: Т.А. Ватульян, Л.С. Ворович, В.И. Литвиненко, О.В. Назаренко, М.С. Шипитко

Подписано в печать 20.12.2019. Выход в свет 23.12.2019. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Шрифт Times. Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 12,76. Тираж 250 экз. Заказ № 7421

Адрес редакции и издателя (для переписки): 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42, ЮФУ,
журнал «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки»,
e-mail: izvestiya@sfedu.ru, адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

Адрес редколлегии: 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 2, к. 110,
тел.: +7 (863) 218-40-00 доб. 11-093; доб. 11-094.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ,
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 1, к. 104, тел. +7 (863) 247-80-51

Journal was founded in 1972 by Yu.A. Zhdanov

Editorial Board:

V.E. Zakrutkin - Chairman of the Editorial Board, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
V.A. Babeshko - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kuban State University, Russia
B.S. Karamurзов - Doctor of Technical Sciences, Professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Russia
V.I. Kolesnikov - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rostov State Transport University, Russia
Yu.F. Korobeinik - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
A.G. Kusraev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
G.G. Matishov - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
V.I. Minkin - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia
M.H. Rabadanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Dagestan State University, Russia
E.Z. Emirbekov - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia
V.N. Trufanov - Deputy Chairman of the Editorial Board, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
A.V. Abanin - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
O.S. Bezuglova - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia
N.I. Boiko - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
A.V. Bochkarev - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Russia
V.V. Vnukov - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia
L.S. Vorovich - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
O.N. Dyomina - Doctor of Biology, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia
A.G. Zakharov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
L.M. Zubov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
Ya.M. Erusalimsky - Deputy Chairman of the Editorial Board, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
M.I. Karjakin - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
S.B. Klimentov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.I. Kolesnikov - Candidate of Geography, Doctor of Agricultural Science, Professor, Southern Federal University, Russia
G.V. Kupovykh - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.V. Kurbatov - Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia
A.M. Lerer - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
V.A. Minoranskiy - Doctor of Agricultural Science, Professor, Southern Federal University, Russia
V.V. Onishchenko - Doctor of Geography, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia
O.V. Nazarenko - Candidate of Geography, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
G.V. Pirogovskaya - Doctor of Agricultural Science, Professor, Institute of Soil Science and Agrochemistry, National Academy of Sciences of Belarus, Belarus
V.S. Rabinovich - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Polytechnic Institute, Mexico
A.K. Saghatelian - Doctor of Geology and Mineralogy, Center for Ecological and Noospheric Studies, National Academy of Sciences of Armenia, Armenia
E.S. Sianisyan - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
Yu.A. Ustinov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
P. Fattal - PhD, Professor, University of Nantes, France
Yu.A. Fedorov - Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia
A.D. Khovanskiy - Candidate of Geology and Mineralogy, Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia
E.A. Shinkarenko - Assistant Editor of the Journal, Southern Federal University, Russia
T.A. Vatulyan - Assistant Editor for Publishing of the Journal, Southern Federal University, Russia

The Founders

Dagestan State Technical University,
Dagestan State University,
Don State Technical University,
Berebekov Kabardino-Balkarian State University,
Kuban State Technological University,
Rostov State Transport University,
Rostov State University of Economics,
Platov South Russian State Technical University,
Southern Federal University

Magazine released T.A. Vatulyan, L.S. Vorovich, V.I. Litvinenko, O.V. Nazarenko, M.S. Shipitko

Signed print 20.12.2019. The publication 23.12.2019. Format 60×84 1/8. Offset paper. Font Times.
Conv. print. sheets 13,02. Publ. sign. 12.76. Edition 250 copies. Order number 7421.

Address of Editorial Board: 344006, Rostov-on-Don, Bolshaya Sadovaya St., 105/42,
SFU, journal "Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Natural Science",
e-mail: izvestiya@sfnu.ru, Web Address: www.izvestiya.sfnu.ru

Address of Editorial Board: 344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 2, room 110,
phone +7 (863) 218-40-00 ext. 11-093; ext. 11-094.

Printed in the printing department, and corporate souvenirs,
Publishing and printing complex KIBI MEDIA CENTER, SFU,
344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 1, room 104, phone (863) 247-80-51

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ. СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

IZVESTIYA VUZOV. SEVERO-KAVKAZSKII REGION

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4

*Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77 – 77252 от 25.11.2019,
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций
Научный журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 4 (204) 2019 г.*

*Registration certificate
PI No. FS 77 - 77252 dated 25.11.2019
issued Federal Service for Supervision
of Communications, Information Technology,
and Mass Media
Science magazine
Published since 1973.
4 issues per a year
No. 4 (204) 2019*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

NATURAL SCIENCE

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Авсянкин О.Г., Каменских Г.А. Формула решения многомерного интегрального уравнения с однородным радиальным ядром 4
Баламирзоев А.Г., Агаханов С.А. Поведение интерполяционных многочленов в окрестности точек разрыва первого рода 8
Бердник Я.А., Сумбатян М.А. Обтекание телесного аэродинамического профиля потоком вязкой жидкости .12
Ватulyan А.О., Поддубный А.А. Об одной модели деформирования неоднородной полосы и идентификации ее свойств 19
Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Моделирование гравитационной концентрационной конвекции при изотаксофорезе 27
Колосова Е.М., Данильченко С.А. Нестационарное контактное взаимодействие в подшипнике скольжения с учётом трения, тепловыделения и износа 36
Мирошников А.Л., Миллер Н.В., Трефилова И.А., Гейбука С.В. Об использовании многомерных интегралов для оценки функции концентрации 42
Хубежты Ш.С. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева 47

Avsyankin O.G., Kamenskikh G.A. The Formula of the Solution of Multidimensional Integral Equation with Homogeneous and Radial Kernel..... 4
Balamirzoev A.G., Agakhanov S.A. The Behavior of the Interpolation Polynomials in a Neighborhood of Points of Discontinuity of the First Kind 8
Berdnik Ya.A., Sumbatyan M.A. Flow of Viscous Fluid Around an Airfoil Profile..... 12
Vatulyan A.O., Poddubny A.A. On a Model of Deformation of an Inhomogeneous Strip and Identification of Its Properties 19
Zhukov M.Yu., Tsyvenkova O.A. Simulation of Gravitational Concentration Convection in Isotachophoresis 27
Kolosova E.M., Danilchenko S.A. Non-Stationary Contact Interaction in a Sliding Bearing Taking into Account Friction, Heat Separation and Wear..... 36
Miroshnikov A.L., Miller N.V., Trefilova I.A., Geybuka S.V. About Using Multidimensional Integrals for Evaluating the Concentration Function 42
Khubezhity Sh.S. An Approximate Solution of Hypersingular Integral Equations Using Chebyshev Series..... 47

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Битюков Н.А., Ткаченко Ю.Ю., Денисов В.И. Максимальный и минимальный сток на реках Сочинского Причерноморья.....	52
Иванченко А.М., Коновалов А.Н., Бессмертный И.В., Хованский А.Д., Латун В.В., Меринова Ю.Ю. Природный потенциал ландшафтов Ростовской области	62
Керимов А.М., Татаренко Н.В., Дахова О.О., Хучунаев Б.М., Куповых Г.В. Сезонный ход концентрации тяжелых металлов в твердых осадках на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаша).....	71
Мисиров С.А., Беспалова Л.А., Магаева А.А., Беспалова Е.В. Исследование овражно-балочной сети южного берега Таганрогского залива с использованием беспилотных летательных аппаратов	77
Назаренко О.В. Изменение некоторых метеорологических показателей в условиях засушливой степи	84
Нурмагомедов Т.Н., Латышенко К.П., Сианисян Э.С. Исследование импеданса сульфатных подземных вод методом электрохимической спектроскопии	91
Склярченко Г.Ю., Закруткин В.Е. Подземные воды Ростовской области: факторы загрязнения и оценка качества	98

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Онищенко В.В., Закруткин В.Е., Решетняк О.С. Международная научная конференция «Актуальные направления сбалансированного развития горных территорий в контексте междисциплинарного подхода» (Карачаевск, 27–29 сентября 2019 г.).....	104
--	-----

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Юрий Анатольевич Устинов (85 лет со дня рождения)	107
Указатель материалов, опубликованных в журнале «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2019 г.	110

SCIENCES OF EARTH

Bityukov N.A., Tkachenko Yu.Yu., Denisov V.I. Maximal and Minimal River Flow of the Sochi Black Sea Coast.....	52
Ivanchenko A.M., Kononov A.N., Bessmertnyi I.V., Khovanskii A.D., Latun V.V., Merinova Yu.Yu. The Landscapes Natural Potential of the Rostov Region	62
Kerimov A.M., Tatarenko N.V., Dakhova O.O., Khuchunaev B.M., Kupovykh G.V. Seasonal Course of Concentration of Heavy Metals in Solid Sediments on the Southern Slope of Elbrus (Garabashi Glacier)	71
Misirov S.A., Besspalova L.A., Magaeva A.A., Besspalova E.V. Investigation of the Ravine-Beam Network of the Southern Coast of the Taganrog Bay Using Unmanned Aerial Vehicles	77
Nazarenko O.V. Variability of Some Meteorological Parameters in the Arid Steppe.....	84
Nurmagomedov T.N., Latyshenko K.P., Sianisyan E.S. Investigation of Sulphate Groundwater Impedance by Electrochemical Spectroscopy	91
Sklyarenko G.Yu., Zakrutkin V.E., Underground Water of the Rostov Region: Features of Pollution and Quality.....	98

SCIENTIFIC LIFE

Onishchenko V.V., Zakrutkin V.E., Reshetnyak O.S. International Scientific Conference “Actual Directions of the Balanced Development of Mountain Territories in the Context of the Interdisciplinary Approach” (Karachayevsk, September 27-29, 2019).....	104
--	-----

OUR PERSONS

Yuri Anatolievich Ustinov (To The 85th Anniversary)	107
Index of Articles Published in the Journal “Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science” in 2019	110

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.9

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-4-7

ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМ РАДИАЛЬНЫМ ЯДРОМ*

© 2019 г. О.Г. Авсянкин¹, Г.А. Каменских¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

THE FORMULA OF THE SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL EQUATION WITH HOMOGENEOUS AND RADIAL KERNEL

O.G. Avsyankin¹, G.A. Kamenskikh¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Авсянкин Олег Геннадиевич – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: ogavsyankin@sfnedu.ru

Oleg G. Avsyankin - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Differential and Integral Equations, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: ogavsyankin@sfnedu.ru

Каменских Галина Александровна – студент, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: gaga-kamenskikh99@mail.ru

Galina A. Kamenskikh - Student, Department of Differential and Integral Equations, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: gaga-kamenskikh99@mail.ru

В пространстве суммируемых функций рассматривается многомерное интегральное уравнение второго рода, ядро которого однородно степени $(-n)$ и радиально по обоим переменным. Для такого уравнения уточняется понятие символа, невырожденность которого является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости этого уравнения при любом свободном члене. В предположении, что символ уравнения является невырожденным, ставится задача построения точного решения. Для его нахождения применяется прием, позволяющий свести данное уравнение к системе двух интегральных уравнений. При этом решение исходного уравнения является суммой решений первого и второго уравнений системы. Первое из уравнений этой системы в результате преобразований сводится к одномерному интегральному уравнению, ядро которого однородно степени (-1) . Это позволяет найти его решение, опираясь на известные результаты. Решение второго уравнения системы непосредственно строится по свободному члену исходного уравнения. Суммируя решения обоих уравнений системы, получаем общую формулу решения исходного интегрального уравнения. В заключительной части работы в качестве примера рассматривается конкретное интегральное уравнение второго рода с однородным и радиальным ядром. Вычисляется символ этого уравнения, и этот символ является невырожденным. С помощью полученной общей формулы строится решение.

Ключевые слова: интегральное уравнение, однородное ядро, символ, решение уравнения, сферические координаты.

* Участие в работе первого автора поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 18-01-00094-А.

In the space of summable functions we consider the multidimensional integral equation of the second kind, the kernel of which is homogeneous of degree $(-n)$ and radial according to both variables. We specify the concept of the symbol for this equation. Non-degeneracy of the symbol is the necessary and sufficient condition for the unique solvability of this equation for any free term. Assuming that the symbol of the equation is non-degenerate we consider the problem of constructing of exact solution of this equation. To find this solution we apply the technique that allows us to reduce this equation to the system of two integral equations. The solution of the original equation is the sum of the solutions of the first and second equations of the system. As a result of transformations, the first of the equations of this system is reduced to a one-dimensional integral equation with the homogeneous kernel of degree (-1) . This allows us to find a solution based on known results. The solution of the second equation of the system is directly constructed from the free term of the original equation. Adding up the solutions of both equations of the system, we obtain the general formula for solving the original integral equation. In the final part of the paper we consider the specific integral equation of the second kind with homogeneous and radial kernel as an example. The symbol of this equation is calculated and this symbol is non-degenerate. Using the obtained general formula we construct the solution of this equation.

Keywords: integral equation, homogeneous kernel, symbol, solution of equation, spherical coordinates.

Введение

В наши дни имеется довольно много работ, посвященных многомерным интегральным операторам с однородными ядрами (см., например, [1–4] и цитированные в них источники). Для таких операторов получены необходимые и достаточные условия обратимости и нетеровости, исследованы порождаемые ими банаховы алгебры, найдены критерии применимости проекционного метода и описано предельное поведение спектров и псевдоспектров усеченных операторов. Однако решения многомерных интегральных уравнений с однородными ядрами ранее практически не строились. Исключением является лишь работа [5], где решение такого уравнения получено в виде ряда по сферическим гармоникам в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

В данной работе в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассматривается многомерное интегральное уравнение второго рода, ядро которого однородно степени $(-n)$ и радиально по обоим переменным. Получена формула его решения в предположении, что это уравнение однозначно и безусловно разрешимо. В заключительной части работы этот результат применяется для нахождения решения конкретного интегрального уравнения.

Ниже использованы следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство;

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$;

$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$;

$\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$; $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$;

$|S_{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь сферы S_{n-1} ;

$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\xi \cdot t} dt$ – преобразование Фурье функции h .

Постановка задачи и основной результат

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где функция $k(r, \rho)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и удовлетворяет следующим условиям:

1°. Однородность степени $(-n)$, т.е. $k(\alpha r, \alpha \rho) = \alpha^{-n} k(r, \rho)$, $\forall \alpha > 0$.

2°. Суммируемость, т.е.

$$\int_0^\infty |k(1, \rho)| \rho^{n/p'-1} d\rho < \infty$$

Из [1, теорема 6.4] следует, что при выполнении условий 1° и 2° интегральный оператор в правой части уравнения (1) ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Функция $k(r, \rho) = (r^n + \rho^n)^{-1}$ удовлетворяет условиям 1° и 2° при $1 < p < \infty$.

Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ определим функцию $\sigma_m(\xi) = 1 - \int_{\mathbb{R}^n} k(1, |y|) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy$, $\xi \in \mathbb{R}$, где $y' = y/|y|$. Здесь $P_m(t)$ – многочлены Лежандра, определяемые равенством

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ \frac{m!(n-3)!}{(m+n-3)!} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geq 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ – многочлены Гегенбауэра. Известно [1, р. 78], что уравнение (1) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие $\sigma_m(\xi) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Используя радиальность ядра $k(|x|, |y|)$, преобразуем функцию $\sigma_m(\xi)$. Переходя к сферическим координатам $y = \rho \theta$ и применяя формулу Каталана [6, с. 20], получим

$$\begin{aligned} \sigma_m(\xi) &= 1 - \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho \int_{S_{n-1}} P_m(e_1 \cdot \theta) d\theta = \\ &= 1 - |S_{n-2}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{\frac{n}{p'}-1+i\xi} d\rho \int_{-1}^1 P_m(t) \times \\ &\quad \times (1-t^2)^{(n-3)/2} dt. \end{aligned}$$

Из свойства ортогональности многочленов Лежандра (см., например, [7, с. 41]) следует, что

$$\int_{-1}^1 P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt = \begin{cases} \frac{|S_{n-1}|}{|S_{n-2}|}, & m = 0, \\ 0, & m > 0. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$\sigma_m(\xi) = \begin{cases} 1 - |S_{n-1}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho, & m = 0, \\ 1, & m > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, из вышесказанного вытекает

Лемма 1. Уравнение (1) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in L_p(R^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma_0(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Пусть условие (3) выполнено. Построим решение уравнения (1). Для любой функции $g \in L_p(R^n)$ положим

$$g^{rad}(\rho) = \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} g(\rho\theta) d\theta. \quad (4)$$

Определим оператор P формулой $(Pg)(\rho) = g^{rad}(\rho)$ и покажем, что $P^2 = P$. Действительно, $(P^2g)(\rho) = \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} g^{rad}(\rho) d\theta = g^{rad}(\rho) = (Pg)(\rho)$.

Положим $g_0(x) = g(x) - g^{rad}(|x|)$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (3). Тогда решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{n/p} h \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(y) dy, \quad (5)$$

где $h(t)$ – функция из пространства $L_1(\mathbb{R})$, определяемая равенством

$$\frac{1}{\sigma_0(\xi)} = 1 + \hat{h}(\xi). \quad (6)$$

Доказательство. Так как $L_p(R^n) = \text{Im} P \oplus \text{Ker} P$, то уравнение (1) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \varphi^{rad}(|x|) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi^{rad}(|y|) dy + f^{rad}(|x|), \\ \varphi_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi_0(y) dy + f_0(x). \end{cases} \quad (7)$$

Преобразуем второе уравнение системы. Переходя к сферическим координатам $|x| = r$, $y = \rho\theta$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} k(|x|, |y|) \varphi_0(y) dy &= \\ &= \int_0^\infty k(r, \rho) \rho^{n-1} d\rho \int_{S_{n-1}} \varphi_0(\rho\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_0 = (I - P)\varphi$, то

$$\int_{S_{n-1}} \varphi_0(\rho\theta) d\theta = 0.$$

Второе уравнение системы (7) примет вид

$$\varphi_0(x) = f_0(x). \quad (8)$$

Обратимся к первому уравнению системы (7).

Снова переходя к сферическим координатам, получим

$$\varphi^{rad}(r) = |S_{n-1}| \int_0^\infty k(r, \rho) \varphi^{rad}(\rho) \rho^{n-1} d\rho + f^{rad}(r).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\Phi(r) = \int_0^\infty k_1(r, \rho) \Phi(\rho) d\rho + F(r), \quad (9)$$

где $\Phi(r) = \varphi^{rad}(r) r^{(n-1)/p}$,

$$F(r) = f^{rad}(r) r^{(n-1)/p},$$

$$k_1(r, \rho) = |S_{n-1}| k(r, \rho) r^{(n-1)/p} \rho^{(n-1)/p'}.$$

Функция $k_1(r, \rho)$ однородна степени (-1) .

Кроме того, из условия 2° сразу следует, что $\int_0^\infty |k_1(1, \rho)| \rho^{-1/p} d\rho < \infty$.

Теория таких интегральных уравнений хорошо известна (см., например, [1, р. 51–54]). В соответствии с результатами этой теории символом уравнения (9) является функция

$$\begin{aligned} s(\xi) &= 1 - \int_0^\infty k_1(1, \rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho = \\ &= 1 - |S_{n-1}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho = \sigma_0(\xi). \end{aligned}$$

Так как выполнено условие (3), то уравнение (9) однозначно разрешимо в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ при любом свободном члене $F(r)$. Найдем это решение. Так как функция $\sigma_0(\xi)$ принадлежит расширенному винеровскому кольцу $\mathbf{W}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (3), то по теореме Винера (см., например, [6, с. 47]) существует функция $h \in L_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющая равенству (6). Тогда решение уравнения (9) дается формулой

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= F(r) + \\ &+ \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{1/p} h \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) F(\rho) d\rho, \quad r \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Умножая обе части этого равенства на $r^{-(n-1)/p}$ и учитывая (4), получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{rad}(r) &= \\ &= f^{rad}(r) + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n/p} h \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) f^{rad}(\rho) d\rho = \\ &= f^{rad}(r) + \\ &+ \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n/p} h \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) f(\rho\theta) d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Возвращаясь к декартовым координатам, окончательно имеем

$$\begin{aligned} \varphi^{rad}(|x|) &= f^{rad}(|x|) + \\ &+ \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{n/p} h \left(\ln \frac{|y|}{|x|} \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, принимая во внимание (8), запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi^{rad}(|x|) + \varphi_0(x) = \varphi^{rad}(|x|) + f_0(x) = \\ &= \varphi^{rad}(|x|) + f(x) - f^{rad}(|x|). \end{aligned}$$

Учитывая равенство (10), приходим к формуле (5). Теорема доказана.

Применим теорему 1 для нахождения решения конкретного интегрального уравнения. А именно

рассмотрим уравнение (1), ядро $k(|x|, |y|)$ которого определяется следующим образом:

$$k(r, \rho) = \frac{1}{4|S_{n-1}|} \begin{cases} \frac{1}{r\rho^{n-1}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n/p}, & \rho < r, \\ \frac{r}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n/p}, & \rho > r. \end{cases} \quad (11)$$

Легко проверить, что функция $k(r, \rho)$ вида (11) удовлетворяет условиям 1° и 2°. В соответствии с формулой (2) найдем $\sigma_0(\xi)$:

$$\begin{aligned} \sigma_0(\xi) &= 1 - |S_{n-1}| \int_0^\infty k(1, \rho) \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\rho^{n/p}}{\rho^{n-1}} \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho - \\ &- \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{\rho^{n/p}}{\rho^{n+1}} \rho^{n/p'-1+i\xi} d\rho = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \rho^{i\xi} d\rho - \frac{1}{4} \int_1^\infty \rho^{i\xi-2} d\rho = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{i\xi+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{i\xi-1} = \frac{1+2\xi^2}{2+2\xi^2}. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{1}{\sigma_0(\xi)} - 1 = \frac{1}{1+2\xi^2}$. Рассмотрим функцию $h(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-|t|/\sqrt{2}}$. Непосредственно проверяется, что $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{1+2\xi^2}$.

Следовательно, по теореме 1

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}|S_{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{n/p} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \left|\ln \frac{|y|}{|x|}\right|\right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) позволяет найти решение уравнения (1) с ядром (11) при любом свободном члене $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Литература

1. Karapetiants N., Samko S. *Equations with Involution Operators*. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001. 427 p.
2. Авсянкин О.Г., Карпетянц Н.К. О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степенями $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1199–1216.
3. Авсянкин О.Г., Перетякин Ф.Г. Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 64–68.

4. Авсянкин О.Г. О C^* -алгебре интегральных операторов с однородными ядрами и осциллирующими коэффициентами // Мат. заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 323–332.

5. Авсянкин О.Г. О точном решении многомерного интегрального уравнения с однородным ядром // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 1. С. 4–8.

6. Авсянкин О.Г. Преобразование Фурье в пространствах суммируемых функций. Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2017. 90 с.

7. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984. 208 с.

References

1. Karapetiants N., Samko S. *Equations with Involution Operators*. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001. 427 p.
2. Avsyankin O.G., Karapetyants N.K. O psevdospektrakh mnogomernykh integral'nykh operatorov s odnorodnymi stepeni $-n$ yadrami [On pseudospectra of multidimensional integral operators with homogeneous degree $-n$ kernels]. *Sib. mat. zhurn.* 2003, vol. 44, No. 6, pp. 1199-1216.
3. Avsyankin O.G., Peretyat'kin F.G. Ob ogranichenosti i kompaktnosti mnogomernykh integral'nykh operatorov s odnorodnymi yadrami [On the limitation and compactness of multidimensional integral operators with homogeneous kernels]. *Izv. vuzov. Matematika.* 2013, No. 11, pp. 64-68.
4. Avsyankin O.G. O C^* -algebre integral'nykh operatorov s odnorodnymi yadrami i ostilliruyushchimi koeffitsientami [On the C^* -algebra of integral operators with homogeneous kernels and oscillating coefficients]. *Mat. zametki.* 2016, vol. 99, iss. 3, pp. 323-332.
5. Avsyankin O.G. O tochnom reshenii mnogomernogo integral'nogo uravneniya s odnorodnym yadrom [On the exact solution of a multidimensional integral equation with a homogeneous kernel]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki.* 2017, No. 1, pp. 4-8.
6. Avsyankin O.G. *Preobrazovanie Fur'e v prostanstvakh summiruemykh funktsii* [Fourier transform in spaces of summable functions]. Rostov-on-Don; Taganrog: Izd-vo YuFU, 2017, 90 p.
7. Samko S.G. *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya* [Hypersingular integrals and their applications]. Rostov-on-Don: Izd-vo RGU, 1984, 208 p.

УДК 517.51

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-8-11

ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК РАЗРЫВА ПЕРВОГО РОДА

© 2019 г. А.Г. Баламирзоев¹, С.А. Агаханов¹

¹Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия

THE BEHAVIOR OF THE INTERPOLATION POLYNOMIALS IN A NEIGHBORHOOD OF POINTS OF DISCONTINUITY OF THE FIRST KIND

A.G. Balamirzoev¹, S.A. Agakhanov¹

¹Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia

Баламирзоев Абдул Гаджибалаевич – доктор технических наук, профессор, кафедра информатики и вычислительной техники, Дагестанский государственный педагогический университет, ул. Ярагского, 57, г. Махачкала, Республика Дагестан, 367003, Россия, e-mail: abdul2000@yandex.ru

Abdul G. Balamirzoev - Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Computer Science and Engineering, Dagestan State Pedagogical University, Yaragского St., 57, Makhachkala, Republic of Dagestan, 367003, Russia, e-mail: abdul2000@yandex.ru

Агаханов Селимхан Агаханович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и вычислительной техники, Дагестанский государственный педагогический университет, ул. Ярагского, 57, г. Махачкала, 367003, Россия

Selimkhan A. Agakhanov - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computer Science and Engineering, Dagestan State Pedagogical University, Yaragского St., 57, Makhachkala, Republic of Dagestan, 367003, Russia

Явление Гиббса хорошо известно для рядов Фурье и их обобщений и состоит в том, что в точках разрыва первого рода функции предельное максимальное колебание частных сумм ее ряда Фурье может оказаться строго больше, чем скачок самой функции. В окрестности точек разрыва первого рода ряд Фурье сходится неравномерно. Это проявляется в том, что у суммы конечного числа членов ряда Фурье есть характерные всплески в окрестности таких точек разрыва исходной функции, частота которых растёт с увеличением числа слагаемых конечной суммы ряда.

Так как интерполяционный полином Лагранжа по корням полиномов Чебышева ведёт себя в некотором смысле аналогично рядам Фурье для некоторых классов функций, то естественно изучить явление Гиббса в окрестности точек разрыва первого рода.

Доказывается наличие явления Гиббса для интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по корням полиномов Чебышева для функции $f(x) = \text{sign}(x - x_0)$ в любой точке $x_0 \in (-1, 1)$.

Ключевые слова: ряд Фурье, явление Гиббса, полином Лагранжа, полином Чебышева, сумма ряда.

The Gibbs phenomenon is well known for Fourier series and their generalizations and consists in the fact that at the points of discontinuity of the first kind of function, the limiting maximum oscillation of the partial sums of its Fourier series can be strictly greater than the jump of the function itself. In the neighborhood of break points of the first kind, the Fourier series converges unevenly, and this is manifested in the fact that the sum of a finite number of terms of the Fourier series has characteristic bursts in the neighborhood of such break points of the original function, the frequency of which increases with the number of terms of the finite sum of the series.

Since the Lagrange interpolation polynomial on the roots of Chebyshev polynomials of the first kind, behave in a sense, in a similar way as Fourier series, for some classes of functions, it is natural to study the Gibbs phenomenon in the vicinity of the discontinuity points of the first kind.

In this paper we prove the presence of the Gibbs phenomenon for the Lagrange interpolation polynomial constructed from the roots of Chebyshev polynomials for the function $f(x) = \text{sign}(x - x_0)$ at any point $x_0 \in (-1, 1)$.

Keywords: Fourier series, Gibbs phenomenon, Lagrange polynomial, Chebyshev polynomial, series sum.

Введение

Как известно из анализа, если функциональный ряд из непрерывных функций равномерно сходится на некотором отрезке, то предельная функция является непрерывной на этом же отрезке. В конце XIX в. на частном примере тригонометрического ряда Гиббсом [1, с. 552–553] было отмечено явление, известное как явление Гиббса. Оно состоит в следующем. Если взять ряд Фурье функции $f(x)$, определяемой равенствами

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \pm\pi, \\ \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

т.е.

$$f(x) = 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \sin(2v-1)x, \quad (1)$$

и обозначить через $S_n(x)$ сумму первых n членов ряда (1), то для любого $x \in [-\pi, \pi]$ будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x), \quad \text{однако} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0+0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n(x) > \frac{\pi}{2}.$$

Известны теоремы В.И. Крылова [2–5] о поведении интерполяционных полиномов Лагранжа по корням полиномов Чебышева для функции, имеющей на отрезке $[-1; 1]$ ограниченную вариацию. Из них вытекает, что последовательности интерполяционных полиномов Лагранжа по корням полиномов Чебышева ведут себя как ряды Фурье для непрерывной функции.

Постановка задачи

Пусть $x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}$ ($\theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n} \pi$, $1 \leq k \leq n$) – нули полинома Чебышева $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$. Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный полином Лагранжа по узлам $x_k^{(n)}$ для функции $f(x)$, т.е.

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) \cdot \frac{T_n(x)}{(x-x_k^{(n)}) \cdot T_n'(x_k^{(n)})}.$$

Пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < x_0, \\ 0, & x = x_0, \\ 1, & x_0 < x \leq 1, \end{cases}$$

где $x_0 \in (-1, 1)$ – фиксированная точка.

Наша цель – показать, что для $L_n(f_0; x)$ имеет место явление Гиббса в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0+0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{L_n(f_0; x)}{f_0(x)} > 1.$$

Доказательство. Пусть $0 < x_0 < 1$ и

$x_0 = \cos \theta_0$. Пока будем считать, что $x_0 \neq x_k^{(n)}$ ($1 \leq k \leq n$), ($n = 1, 2, 3, \dots$). Допустим, что $x_{k_0+1}^{(n)} < x_0 < x_{k_0}^{(n)}$. Положим $\bar{x}_n = \cos \bar{\theta}_n$, где $\bar{\theta}_n = \frac{\theta_{k_0-1}^{(n)} + \theta_{k_0}^{(n)}}{2}$. Тогда

$$L_n(f_0, \bar{x}_n) = T_n(\bar{x}_n) \left\{ \sum_1^{k_0} \frac{1}{(\bar{x}_n - x_k^{(n)}) T_n'(x_k^{(n)})} - \sum_{k_0+1}^n \frac{1}{(\bar{x}_n - x_k^{(n)}) T_n'(x_k^{(n)})} \right\}.$$

Так как

$$T_n'(x_k^{(n)}) = n \cdot \frac{\sin(n \cdot \arccos x_k^{(n)})}{\sqrt{1-x_k^{(n)2}}} = n \cdot \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{\sin \theta_k^{(n)}} = n \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \theta_k^{(n)}}, \text{ то}$$

$$L_n(f_0, \bar{x}_n) = \frac{\cos n \bar{\theta}_n}{n} \left\{ \sum_1^{k_0} \frac{(-1)^{k+1} \sin \theta_k^{(n)}}{\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_k^{(n)}} - \sum_{k_0+1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_k^{(n)}} \right\}.$$

Положим для краткости

$$A_k^{(n)} = \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_k^{(n)}}.$$

Будем считать для определенности $k_0 = 2 \cdot N$ четным числом. Тогда

$$L_n(f_0, \bar{x}_n) = \frac{\cos n \bar{\theta}_n}{n} \left\{ \sum_1^{2N} (-1)^{k+1} A_k^{(n)} - \sum_{2N+1}^n (-1)^{k+1} A_k^{(n)} \right\} = \frac{\cos n \bar{\theta}_n}{n} \left\{ \sum_{k=1}^N (A_{2k-1}^{(n)} - A_{2k}^{(n)}) + \sum_{k_0+1}^n (A_{2k}^{(n)} - A_{2k-1}^{(n)}) - A_n^{(n)} \right\}.$$

При n четном в последней строке слагаемое $A_n^{(n)}$ надо опустить. Так как $\bar{\theta}_n = \frac{\theta_{k_0-1}^{(n)} + \theta_{k_0}^{(n)}}{2} = \frac{k_0-1}{n} \pi$, то $\cos n \bar{\theta}_n = (-1)^{k_0-1} = -1$, поскольку k_0 – четное число.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_{2k-1}^{(n)} - A_{2k}^{(n)} &= \frac{\sin \theta_{2k-1}^{(n)}}{\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k-1}^{(n)}} - \frac{\sin \theta_{2k}^{(n)}}{\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)}} = \\ &= \frac{(\sin \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k}^{(n)}) \cos \bar{\theta}_n + (\sin \theta_{2k}^{(n)} \cos \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k-1}^{(n)} \cos \theta_{2k}^{(n)})}{(\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k-1}^{(n)}) (\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)})} = \\ &= \frac{(\sin \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k}^{(n)}) \cos \bar{\theta}_n + \sin \frac{\pi}{n}}{(\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k-1}^{(n)}) (\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)})} = \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$L_n(f_0, \bar{x}_n) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_1^N \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^m \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} \right\}.$$

Далее имеем

$$J_k^{(1)} = 2 \cos \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{n} \right) \cos \bar{\theta}_n + \sin \frac{\pi}{n} = O \left(\frac{1}{n} \right),$$

где $O \left(\frac{1}{n} \right)$ – абсолютная величина постоянная (вообще всюду); в дальнейшем $O \left(\frac{1}{n} \right)$ либо абсолютная постоянная, либо зависит только от x_0 , $m = \left[\frac{n}{2} \right]$.

Положив $v = \left[\frac{n}{4} \right]$, получим

$$\sum_{v+1}^m \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} = O(n^{-1}) \left\{ \sum_{v+1}^m \frac{1}{|J_k^{(2)}|} + |A_n^{(n)}| \right\}.$$

Воспользовавшись тем, что для всех $v+1 \leq k \leq m$ (равномерно)

$$J_k^{(2)} = (\bar{x}_n - x_{2k}^{(n)}) (\bar{x}_n - x_{2k-1}^{(n)}) \geq \bar{x}_n^2 \geq x_0^2$$

(поскольку $x_{2k}^{(n)} \leq 0$, $x_{2k-1}^{(n)} \leq 0$) и, кроме того,

$$A_n^{(n)} = O(1), \text{ получим}$$

$$\sum_{v+1}^m \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} = O \left(\frac{1}{n} \right) \{ (m - v) + 1 \} = O(1).$$

Поэтому

$$L_n(f_0, \bar{x}_n) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_1^N \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^v \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} \right\} + O \left(\frac{1}{n} \right).$$

Применение формулы Тейлора к разности $\sin \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k}^{(n)}$ дает для $J_k^{(1)}$ выражение

$$J_k^{(1)} = \sin \frac{\pi}{n} + \cos \bar{\theta}_n \left(\cos \theta_{2k}^{(n)} (\theta_{2k-1}^{(n)} - \theta_{2k}^{(n)}) + O \left((\theta_{2k-1}^{(n)} - \theta_{2k}^{(n)})^2 \right) \right) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \bar{\theta}_n \cos \theta_{2k}^{(n)} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} + O \left(\frac{1}{n^3} \right) - \frac{\pi}{n} \cos \bar{\theta}_n \cos \theta_{2k}^{(n)} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} \left(1 - \cos \bar{\theta}_n \cos \theta_{2k}^{(n)} \right) + O \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

$$\text{Но } 1 - \cos \bar{\theta}_n \cos \theta_{2k}^{(n)} =$$

$$= 1 - \cos^2 \bar{\theta}_n + \cos \bar{\theta}_n (\cos \bar{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)}) =$$

$$= \sin^2 \bar{\theta}_n + 2 \cos \bar{\theta}_n \cdot \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \sin \frac{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{2} =$$

$$= \sin^2 \bar{\theta}_n + O \left(|\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n| \right).$$

Поэтому

$$J_k^{(1)} = \frac{\pi}{n} \sin^2 \bar{\theta}_n + O \left(\frac{|\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} \sin^2 \bar{\theta}_n + O \left(\frac{|\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n|}{n} \right).$$

Так как $\frac{2}{\pi} |t| \leq |\sin t| \leq |t|$ для $|t| \leq \frac{\pi}{2}$, то для этих же t будет

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = O(|t|), \text{ поэтому}$$

$$\left\{ J_k^{(2)} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 4 \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{2} \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \sin \frac{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{2} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 2(\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n) \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{2} \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \right\}^{-1} =$$

$$= O \left(\frac{|\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n|}{|\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n|} \right).$$

Здесь мы воспользовались еще тем, что

$$\sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \geq \sin^2 \frac{\bar{\theta}_n}{2} \text{ для } 1 \leq k \leq v. (*)$$

Применение еще раз аналогичного рассуждения дает

$$\left\{ J_k^{(2)} \right\}^{-1} = \left\{ (\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n) (\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n) \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \right\}^{-1} +$$

$$+ O \left\{ \left| \frac{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n} \right| + \left| \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n} \right| \right\}.$$

Заметим, что

$$\sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} = \sin^2 \frac{\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}}{2} + O \left(\frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos (\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)}) \right) + O \left(\frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 2\bar{\theta}_n + (\cos 2\bar{\theta}_n - \cos (\bar{\theta}_n + \theta_{2k}^{(n)})) \right\} +$$

$$+ O \left(\frac{1}{n} \right) = \sin^2 \bar{\theta}_n + O \left(|\bar{\theta}_n - \theta_{2k}^{(n)}| + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \sin^2 \bar{\theta}_n + O \left(|\bar{\theta}_n - \theta_{2k}^{(n)}| \right).$$

Отсюда (с учетом выражения (*)) следует

$$\left\{ J_k^{(2)} \right\}^{-1} = \left\{ (\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n) (\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n) \sin^2 \bar{\theta}_n \right\}^{-1} +$$

$$+ O \left\{ \left| \frac{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n} \right| + \left| \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n} \right| + \frac{1}{|\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n|} \right\}. \text{ Так как}$$

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \bar{\theta}_n}{\theta_{2k}^{(n)} - \bar{\theta}_n} \right| = \left| \frac{4k-2k_0-1}{4k-2k_0+1} \right| < 2 \text{ для } 1 \leq k \leq v,$$

$$\text{то } \left\{ J_k^{(2)} \right\}^{-1} = \frac{4n^2}{\pi^2 (4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1) \sin^2 \bar{\theta}_n} +$$

$$+ O \left(\frac{n}{|4k-2k_0-1|} \right). \quad (**)$$

Отсюда, в частности, следует

$\{J_k^{(2)}\}^{-1} = O\left(\frac{n^2}{(4k-2k_0-1)^2}\right)$. Вклад остаточного члена для $J_k^{(1)}$ дает для разности $\sum_1^N \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^v \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}$ величину порядка $O(1) \sum_1^v \frac{n^2}{(4k-2k_0-1)^2} \cdot \frac{(4k-2k_0-1)}{n^2} = O(\ln n)$.

Итак, окончательно имеем

$$L_n(f_0, \bar{x}_n) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_1^N \frac{\pi \sin^2 \bar{\theta}_n}{n J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^v \frac{\pi \sin^2 \bar{\theta}_n}{n J_k^{(2)}} \right\} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Остаточный член в формуле (**) дает для $L_n(f_0, \bar{x}_n)$ величину порядка

$$O(1) \sum_1^v \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{|4k-2k_0-1|} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_n(f_0, \bar{x}_n) &= \\ &= -\frac{4n}{\pi} \left\{ \sum_1^N \frac{1}{(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{N+1}^v \frac{1}{(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)} \right\} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \\ &= -\frac{4}{\pi} \left\{ -1 + \sum_1^{N-1} \frac{1}{(16k^2-1)} - \sum_{N+1}^{v-N} \frac{1}{(16k^2-1)} \right\} + \\ &\quad + O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned}$$

Так как (в силу неравенств

$$x_{k_0+1}^{(n)} < \bar{x}_n < x_{k_0}^{(n)}, \quad k_0 = \frac{\theta_0}{\pi} n + \lambda, \quad \text{где } |\lambda| \leq \frac{1}{2},$$

то $v - N = \left[\frac{n}{4} \right] - \frac{1}{2} k_0 = \frac{n}{4} - \lambda_1 - \frac{\theta_0}{2\pi} n - \frac{1}{2} \lambda =$
 $= \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\pi} \right) \frac{n}{2} - \lambda_1 - \frac{\lambda}{2}, \quad \text{где } 0 \leq \lambda_1 < 1.$

Поскольку $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, то для $n \rightarrow \infty$ будет $v - N \rightarrow \infty$. Поэтому $\overline{\lim} L_n(f_0, \bar{x}_n) = \frac{4}{\pi} > 1$, $N - 1 > v - N$ (случай $N - 1 \leq v - N$ рассматриваем аналогично).

$$\sum_1^{N-1} \frac{1}{(4k)^2-1} - \sum_{N+1}^{v-N} \frac{1}{((4k)^2-1)} = \sum_{v+1}^{N-1} \frac{1}{(4k)^2-1} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В самом начале работы мы считали, что $x_0 \neq x_k^{(n)}$ для $1 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, что существует бесконечная последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ такая, что $x_0 \neq x_k^{(n_i)}$ для $1 \leq k \leq n_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, ибо в противном случае было бы $x_0 = x_k^{(n)}$ при $n \geq N$ и некоторых $k = k(n)$, т.е. $\frac{\theta_0}{\pi} = \frac{2k(n)-1}{2n}$, что возможно только при $\frac{\theta_0}{\pi}$ рациональном.

Если же интерполяционный полином Лагранжа дает явление Гиббса во всех иррациональных точках, то из плотности множества иррациональных чисел во множестве действительных чисел следует наличие явления Гиббса и в любой рациональной точке.

Литература

1. Фиктенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. М.: Наука, 2003. Т. 3. 662 с.
2. Агаханов С.А., Натансон Г.И. Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 6. С. 1215–1218.
3. Агаханов С.А. Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования обобщенных рядов Фурье // Функциональный анализ, теория функций и их приложения : сб. ст. Махачкала, 1974. Вып. 1. С. 21–26.
4. Агаханов С.А. Явление Гиббса в теории тригонометрических рядов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1974. 57 с.
5. Натансон Г.И. Явление Гиббса для сумм Валле-Пуссена // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции : сб. ст. М.: Физматгиз, 1961. С. 206–213.

References

1. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya [Course of differential and integral calculus]. In 3 vol. Moscow: Nauka, 2003, vol. 3, 662 p.
2. Agakhanov S.A., Natanson G.I. Yavlenie Gibbsa pri nekotorykh protsessakh summirovaniya ryadov Fur'e [Gibbs phenomenon in some processes of summation of Fourier series]. Dokl. AN SSSR. 1965, vol. 162, No. 6, pp. 1215-1218.
3. Agakhanov S.A. [Gibbs phenomenon in some summation processes of generalized Fourier series]. Funktsional'nyi analiz, teoriya funktsii i ikh prilozheniya [Functional analysis, theory of functions and their applications]. Collected Papers. Makhachkala, 1974, iss. 1, pp. 21-26.
4. Agakhanov S.A. Yavlenie Gibbsa v teorii trigonometricheskikh ryadov: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Gibbs phenomenon in the theory of trigonometric series]. Leningrad, 1974, 57 p.
5. Natanson G.I. [Gibbs phenomenon for Valle-Poussin sums]. Issledovaniya po sovremennym problemam konstruktivnoi teorii funktsii [Research on modern problems of constructive theory of function]. Collected Papers. Moscow: Fizmatgiz, 1961, pp. 206-213.

УДК 532.5: 532.13

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-12-18

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛЕСНОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ*

© 2019 г. Я.А. Бердник¹, М.А. Сумбатян¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

FLOW OF VISCOUS FLUID AROUND AN AIRFOIL PROFILE

Ya.A. Berdnik¹, M.A. Sumbatyan¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Бердник Янина Александровна – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: yberdnik@sfnedu.ru

Yanina A. Berdnik - Postgraduate, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: yberdnik@sfnedu.ru

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: sumbat@math.sfnedu.ru

Mezhlum A. Sumbatyan - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: sumbat@math.sfnedu.ru

Рассматривается задача обтекания симметричного телесного аэродинамического профиля потоком вязкой жидкости с применением точных уравнений Навье – Стокса. Используется итерационный метод по малым возмущениям скоростей относительно скоростей основного потока. Путём применения преобразования Фурье к уравнениям системы дифференциальных уравнений она сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно образов Фурье. Для интегральных уравнений относительно функции вязкого трения на каждом шаге используется метод коллокации, сводящий интегральное уравнение, полученное из системы дифференциальных уравнений, к системе линейных алгебраических уравнений. Параметр сопротивления, в зависимости от различных профилей НАСА с симметричным граничным контуром, сравнивается с решением П. Кунца. Итерационный метод, впервые предложенный авторами для обтекания тонкого телесного профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости, сходится за несколько шагов. Функция профиля учитывается только на первом шаге итерации, а все последующие итерации работают в том же алгоритме, что и в задаче для тонкой пластинки, решённой авторами ранее. Точность метода проверена сравнением с имеющимися данными для $Re = 2000$. Максимальная относительная погрешность не превышает 1 % по сравнению с результатами П. Кунца.

Ключевые слова: обтекание крылового профиля, вязкая жидкость, параметр сопротивления, крыловые профили НАСА, итерационный метод, интегральные уравнения, сингулярные интегралы, численные методы.

This work presents a study on the problem of a flow of viscous fluid around a symmetric airfoil using the exact Navier - Stokes equations. An iterative method is used for small perturbations of velocities relatively to the velocities of the basic flow. By applying the Fourier transform to equations of a system of differential equations, it is reduced to a system of linear algebraic equations concerning Fourier images. A collocation method is used at each step for integral equations relatively to the viscous friction function, reducing the integral equation obtained from the system of differential equations to a system of linear algebraic equations. The drag coefficient, depending on different symmetrical NACA airfoils, is compared with Peter Kunz's solution. Thus, iterative method, which was first proposed by the authors for the flow of viscous incompressible fluid around a thin airfoil,

* Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ № 9.5794.2017/8.9.

converges in several steps. Whereas the airfoil function is taken into account only at the first iteration step, all following iterations use the same algorithm as the one for the problem of a thin plate solved by the authors earlier. The accuracy of the method is verified by comparison of the results obtained and the available data for $Re = 2000$. As a result, the maximum relative error does not exceed 1 % compared to the results of P. Kunz.

Keywords: flow around an airfoil, viscous fluid, drag coefficient, NACA airfoils, iterative method, integral equations, singular integrals, numerical methods.

Введение

Главные проблемы проектирования и изготовления микровоздушных транспортных средств (или микролетательных аппаратов) – сложность их конструирования, обеспечение летных качеств и возможность их полного контроля. Многие годы преобладал в большей степени теоретический, нежели практический, интерес к изучению аэродинамики очень маленьких физических масштабов и небольших чисел Рейнольдса. Однако технологический прогресс с конца 90-х гг. XX в. сделал полёт при малых числах Рейнольдса реальным. Таким образом, растущий интерес к разработке микровоздушных транспортных средств создал потребность в улучшении понимания эффективной аэродинамики. Режим полёта микросамолёта или микровертолёта сопряжен с решением многочисленных проблем аэродинамического анализа и последующего конструирования. По этой причине существует относительно небольшое количество экспериментальных и теоретических работ для аэродинамических поверхностей, работающих при $Re < 10\,000$. Экспериментальные данные аэродинамического профиля были опубликованы в [1, 2] при числах Рейнольдса от 20 000 до 30 000, но с точки зрения природы вязких эффектов они значительно отличаются от диапазона ниже $Re = 10\,000$, представляющего значительный интерес.

Исследования, проведённые в последние годы, показывают, что на сверхлёгких самолётах возможно заменить двигатели внутреннего сгорания на электрические, что должно сократить стоимость эксплуатации и уменьшить урон, наносимый окружающей среде. Из этих заключений и того факта, что человечество стремится к изобретению и использованию компактных, довольно быстрых воздушных машин, которыми оно может пользоваться на повседневной основе, можно заключить, что исследование обтекания профилей различных форм (в том числе и крыловых) является актуальным и в настоящее время.

Цель данного исследования – вычисление коэффициента сопротивления C_d для различных симметричных профилей NACA и сравнение полученных данных с работой [3], где автор, в свою очередь, сравнивает свои результаты, полученные с использованием прямого численного метода, с экспериментальными [4, 5] и получает хорошее совпадение. Данная работа логически продолжает исследование [6], в котором предлагается новый итерационный полуаналитический метод изучения обтекания тонкой пластинки конечной длины однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, и использует результаты, полученные в этом исследовании.

Постановка задачи и вывод основных формул

Исследуется обтекание симметричного телесного аэродинамического профиля безграничным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1). Задача исследуется в двумерном приближении. Искомой величиной является коэффициент сопротивления C_d .

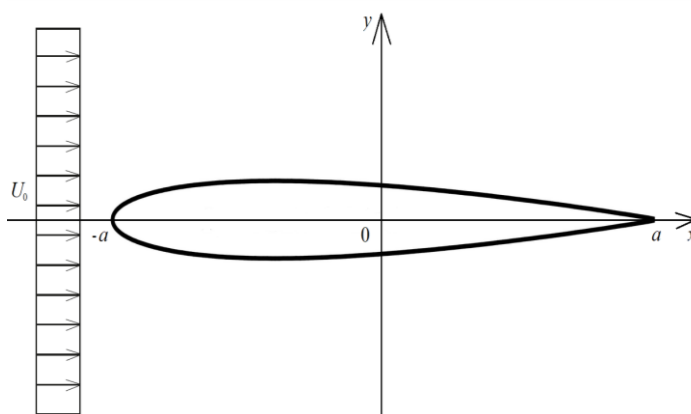


Рис. 1. Обтекание симметричного телесного аэродинамического профиля с хордой $l = 2a$ набегающим потоком вязкой жидкости со скоростью U_0 / Fig. 1. Flow around a symmetrical two-dimensional airfoil with a chord $l = 2a$ of the incoming flow of viscous fluid at a velocity U_0

Течение жидкости рассматривается в декартовой системе координат Oxy , где горизонтальная ось Ox направлена вдоль набегающего потока, ось Oy – вертикально вверх. В силу симметрии течения рассматривается только верхняя полуплоскость. Течение жидкости полагается стационарным и ламинарным и описывается уравнениями Навье – Стокса и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \nu \Delta v_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} - \nu \Delta v_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

В (1) ρ – массовая плотность жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости; p – гидродинамическое давление; $v_1 = v_x$ и $v_2 = v_y$ – продольная и поперечная компоненты вектора скорости соответственно.

Граничные условия прилипания на поверхности профиля имеют следующий вид:

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{t}} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{t}}$ и $\bar{\mathbf{n}}$ – соответственно единичные векторы касательной и нормали к граничной кривой профиля $y=f(x)$.

В данной работе используется подход, основанный на последовательных приближениях по возмущениям скорости. Продольная (v_x) и поперечная (v_y) компоненты скорости представляются в виде сумм скоростей основного набегающего потока и малых на его фоне искомых возмущений (v'_x , v'_y):

$$v_x(x, y) = U(x, y) + v'_x(x, y),$$

$$v_y(x, y) = V(x, y) + v'_y(x, y). \quad (4)$$

При этом количество штрихов над функцией соответствует номеру итерации.

На нулевом шаге предполагается, что вектор скорости равен $\{U_0, 0\}$. Таким образом, на первом шаге: $U(x, y) = U_0$, $V(x, y) = 0$. Также вводится функция тока соотношениями $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$,

$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Выражение для функции тока представляется аналогично разложению скоростей на первой итерации: $\psi(x, y) = \Psi(y) + \psi'(x, y)$, $\Psi(y) = U_0 y$.

Векторы касательной и нормали к поверхности крыла $\bar{\mathbf{t}}$ и $\bar{\mathbf{n}}$, а также вектор скорости потока $\bar{\mathbf{v}}$ имеют вид

$$\bar{\mathbf{t}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \right\}, \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \left\{ -\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \right\}, \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \left\{ U_0 + \frac{\partial \psi'}{\partial y}, -\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right\}. \quad (7)$$

Штрих над функцией $f(x)$ означает производную. Предполагаем, что телесный профиль очень тонкий, следовательно, величина $f'(x)$ мала.

В первом приближении, подставляя разложение (4), записанные в терминах функции тока, в исходные уравнения Навье – Стокса, приходим к линейному уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$U_0 \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \nu \Delta^2 \psi' = 0.$$

В линейном приближении рассматриваем это уравнение в верхней полуплоскости, т.е. при $y \geq 0$. Применяя преобразование Фурье по переменной x , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого, ограниченное при $y \rightarrow +\infty$, имеет вид

$$\tilde{\psi}'(\alpha, y) = C_1 e^{-|\alpha|y} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\nu \alpha^2 - U_0 i \alpha}{\nu}} y}, \quad (8)$$

где α – параметр преобразования Фурье.

В линейном приближении сносим граничное условие (3) на ось x , т.е. берем его при $y = 0$. При этом оно принимает вид

$$\left(U_0 + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) f' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Условие (9) выполняется не только в области профиля, но и вне его на оси x , если считать, что в этой области $f \equiv 0$. В самом деле, последнее слагаемое в (9) соответствует вертикальной компоненте вектора скорости, которая вне профиля в силу симметрии равна нулю.

Используя принцип замораживания функции $f(x)$, применяя преобразования Фурье к соотношению (9) и учитывая (8), получаем

$$-i\alpha(C_1 + C_2) + f'(x) \left(-|\alpha|C_1 - \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i \alpha}{\nu}} C_2 \right) =$$

$$= -U_0 \tilde{f}'(\alpha). \quad (10)$$

Введём в рассмотрение вектор напряжений Коши $p_i^n = p_{ij}n_j$. Так как $\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$, то после некоторых математических преобразований получаем выражение для p_τ :

$$p_\tau = \mu \left(2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tau_1 n_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \tau_2 n_2 \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) (n_2^2 - n_1^2) \right). \quad (11)$$

Отбрасывая функцию f'^2 в силу малости и принимая во внимание (10), получаем из выражения (11) уравнение

$$4i\alpha(i\alpha(C_1 + C_2) - U_0 \tilde{f}'(\alpha)) + \left(2\alpha^2 C_1 + \left(2\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu} \right) C_2 \right) = \frac{\tilde{T}'}{\mu}, \quad (12)$$

где $T' = p'_\tau$ – касательная сила трения на поверхности профиля.

Запишем соотношения (10), (12) в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} -2\alpha^2 C_1 - \left(2\alpha^2 + \frac{U_0 i\alpha}{\nu} \right) C_2 = \frac{\tilde{T}'}{\mu} + 4i\alpha U_0 \tilde{f}'(\alpha), \\ (-i\alpha - f'(x)|\alpha|) C_1 + \left(-i\alpha - f'(x) \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \right) C_2 = -U_0 \tilde{f}'(\alpha). \end{cases} \quad (13)$$

Решаем эту СЛАУ методом Крамера. Главный определитель системы (13)

$$\begin{aligned} \Delta &= -2\alpha^2 \left(-i\alpha - f' \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \right) - \\ &- (i\alpha + f'|\alpha|) \left(2\alpha^2 + \frac{U_0 i\alpha}{\nu} \right) = \\ &= 2\alpha^2 f' \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} - 2\alpha^2 f'|\alpha| + \frac{U_0 \alpha^2}{\nu} - f' \frac{U_0 i\alpha}{\nu} |\alpha|. \end{aligned}$$

Заметим, что при преобразовании Фурье по переменной x , т.е. вдоль потока, применение принципа замораживания означает, что физически ищется решение, которое в окрестности каждой граничной точки профиля изменяется вдоль x очень медленно. Легко показать, что это эквивалентно тому, что в образах Фурье мы работаем при малых α . Тогда выражение для главного определителя может быть упрощено, если в нём отбросить все малые более высокого порядка малости по сравнению с α^2 :

$$\Delta \approx \frac{U_0}{\nu} (\alpha^2 - i\alpha |\alpha| f').$$

Аналогично, оставляя только члены главного порядка малости по α и отбрасывая квадраты величин типа f' , получаем

$$\Delta_1 = \left(\frac{\tilde{T}'}{\mu} + 4i\alpha U_0 \tilde{f}' \right) \left(-i\alpha - f' \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \right) - U_0 \tilde{f}' \left(2\alpha^2 + \frac{U_0 i\alpha}{\nu} \right),$$

$$\Delta_1 \approx \frac{\tilde{T}'}{\mu} \left(-i\alpha - f' \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \right) - \frac{U_0^2 \tilde{f}'}{\nu} i\alpha,$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 2\alpha^2 U_0 \tilde{f}' + \left(\frac{\tilde{T}'}{\mu} + 4i\alpha U_0 \tilde{f}' \right) (i\alpha + f'|\alpha|) \approx \\ &\approx \frac{\tilde{T}'}{\mu} (i\alpha + f'|\alpha|). \end{aligned}$$

Соотношение (2) с учетом выражений (5)–(7) принимает вид

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0 \quad \sim \quad \left(U_0 + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) - f' \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_1(\alpha) + C_2(\alpha)) e^{-i\alpha x} i\alpha d\alpha - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|\alpha| C_1(\alpha) + \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} C_2(\alpha) \right) e^{-i\alpha x} d\alpha = -U_0, \\ &|x| \leq a. \end{aligned} \quad (14)$$

Первый интеграл в (14) можно отбросить, так как он содержит $f'^2(x)$ – малое 2-го порядка малости по f' . Выражение, входящее во второй интеграл, связано с величиной

$$\begin{aligned} |\alpha| \Delta_1 + \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \Delta_2 &= \\ &= \frac{\tilde{T}'}{\mu} (-i\alpha) \left(|\alpha| - \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \right) - \frac{U_0^2 \tilde{f}'}{\nu} i\alpha |\alpha|. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (15), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{T}'}{\mu} (-i\alpha) \left(|\alpha| - \sqrt{\alpha^2 - \frac{U_0 i\alpha}{\nu}} \right) - \frac{U_0^2 \tilde{f}'}{\nu} i\alpha |\alpha| \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0 (\alpha^2 - i\alpha |\alpha| f')}{\nu} d\alpha = \\ &= -U_0, \end{aligned}$$

$$\text{или } -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\tilde{T}'}{\mu} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{U_0}{\nu \alpha}} \right) + \frac{U_0^2}{\nu} \tilde{f}'}{\frac{U_0}{\nu} (f' + i \operatorname{sign}(\alpha))} d\alpha = -U_0.$$

В результате, применяя формулу обращения для $\tilde{T}'$, приходим к интегральному уравнению относительно силы трения на граничном контуре профиля:

$$\begin{aligned} & -\frac{\nu}{2U_0\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{T'(\xi)}{\mu} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{U_0}{\nu \alpha}}}{f'(x) + i \operatorname{sign}(\alpha)} e^{i\alpha(\xi-x)} d\alpha = \\ & = -U_0 + \frac{U_0}{2\pi} \int_{-a}^{+a} f'(\xi) d\xi \frac{e^{i\alpha(\xi-x)}}{f'(x) + i \operatorname{sign}(\alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

При этом интеграл в правой части уравнения вычисляется в явном виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\alpha(\xi-x)}}{i + f'(x)} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha(\xi-x)}}{-i + f'(x)} d\alpha = \\ & = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha(\xi-x))}{1 + f'^2(x)} \cdot 2f'(x) d\alpha + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha(\xi-x))}{1 + f'^2(x)} \approx \\ & \approx \frac{2\pi f'(x) \delta(\xi-x)}{1 + f'^2(x)} + \frac{1}{\xi-x} \cdot \frac{2}{1 + f'^2(x)}. \end{aligned}$$

Отбрасывая первый член в последнем выражении как содержащий нелинейный множитель f'^2 , перепишем правую часть интегрального уравнения в виде $-U_0 + \frac{U_0}{2\pi} \cdot 2 \int_{-a}^{+a} \frac{f'(\xi) d\xi}{\xi-x}$.

В результате основное интегральное уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & -\frac{\nu}{\pi U_0} \int_{-a}^{+a} \frac{T'(\xi)}{\mu} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{U_0}{\nu \alpha}}}{i \operatorname{sign}(\alpha) + f'(x)} e^{i\alpha(\xi-x)} d\alpha = \\ & = -U_0 + \frac{U_0}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{f'(\xi)}{\xi-x} d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Любопытно, что при $f(x) \equiv 0$ уравнение (16) вырождается в интегральное уравнение обтекания тонкой пластинки вязким потоком несжимаемой жидкости [6], как и должно быть с физической точки зрения.

Уравнение (16) решается численно методом коллокации [7, 8] – для нахождения первого при-

ближения к решению для телесного симметричного профиля.

Полученное первое приближение подставляется в виде «входного» для итерационного процесса, использованного ранее для тонкой пластинки [6]. Таким образом, толщинная функция профиля учитывается только на первом шаге итерации, а последующие итерации работают в том же алгоритме, что и для тонкой пластинки.

Этот метод тестируется на профилях серии NACA00t [9], граничный контур которых симметричен и описывается уравнением

$$\begin{aligned} y = f(x) = & \pm 5t (0,2969 \sqrt{x} - 0,1260 x - \\ & - 0,3516 x^2 + 0,2843 x^3 - 0,1015 x^4), \end{aligned}$$

где $0 < x < 1$ – горизонтальная координата; t – максимальная толщина профиля (совпадает с номером из двух последних цифр номера NACA, делённым на 100. Например, толщина профиля NACA0002 равна $02/100=0,02$).

Отметим, что сравнение идёт по коэффициенту сопротивления C_d [10] (сравни также с [6]):

$$\begin{aligned} C_d &= \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 l}, & F_d &= 2W, \\ W &= \frac{S \cdot W_{Blaz}}{0,664} = S U_0^{3/2} \sqrt{l\nu}, & F_d &= 2S U_0^{3/2} \sqrt{l\nu}, \end{aligned}$$

где W – полная сила граничного трения с одной стороны профиля, $W_{Blaz} = 0,664 \rho U_0^2 \sqrt{\frac{2a\nu}{U_0}}$ – аналогичная величина, полученная Г. Блазиусом приближенно в аналитическом виде [10].

В итоге для коэффициента лобового сопротивления получаем $C_d = \frac{4S}{\rho} \sqrt{\frac{\nu}{2aU_0}}$ (таблица).

Сравнение полученных результатов с результатами Kunz [3] / Comparison of the results obtained with the results of Kunz [3]

Профиль NACA	C_d [3]	C_d
NACA0000 (пластинка)	0,0656	0,0667
NACA0002	0,0682	0,0690
NACA0004	0,0708	0,0709
NACA0006	0,0734	0,0727
NACA0008	0,0760	0,0755

Таким образом, максимальное отклонение результатов, представленных в таблице, приблизительно составляет 1 %. Графическое сравнение представлено на рис. 2.

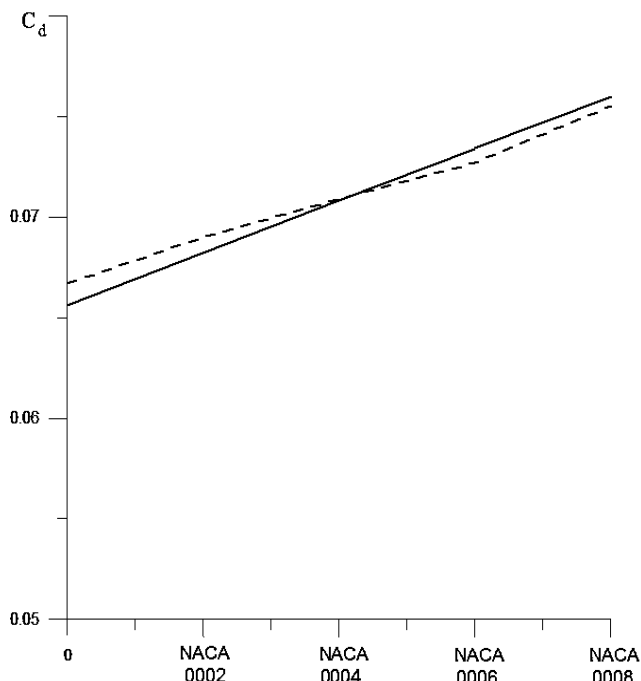


Рис. 2. Изменение параметра сопротивления C_d в зависимости от номера профиля NACA. Сплошная линия соответствует расчётам Kunz [3], пунктирная – методу, предложенному авторами / Fig. 2. Change of drag parameter C_d versus NACA profiles. The solid line corresponds to Kunz calculations [3], the dashed line corresponds to the method proposed by the authors

Заключение

В работе предлагается новый итерационный метод расчета ламинарного обтекания тонкого симметричного телесного профиля потоком вязкой жидкостью при небольших числах Рейнольдса. Метод состоит в последовательной линеаризации задачи на фоне приближения предыдущего шага. На каждом шаге решается линейная краевая задача для уравнения в частных производных 4-го порядка с переменными коэффициентами. Применяя принцип замораживания и преобразование Фурье вдоль потока, приходим к некоторым интегральным уравнениям относительно функции вязкого трения на контуре профиля. Метод тестируется на семействе профилей класса NACA00t [9].

Максимальное отклонение от экспериментальных данных для $Re = 2000$ по силе сопротивления составляет не более 1 %.

Литература

1. Schmitz F.W. *Aerodynamics of the Model Airplane*. Huntsville, AL: NASA Marshall Space Flight Center, 1967. 201 p.
2. Althaus D. *Profilpolaren für den Modellflug*. Band 2. GmbH: Neckar-Verlag, 1988. 176 p.
3. Kunz P.J. *Aerodynamics and Design for Ultra-Low Reynolds Number Flight: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy*. Stanford, 2003. 180 p.
4. Sunada S., Kawachi K. Comparison of Wing Characteristics at an Ultra Low Reynolds Number // *J. of Aircraft*. 2002. Vol. 39 (2). P. 331–338.
5. Azuma A., Okamoto M., Yasuda K. Aerodynamic Characteristics of Wings at Low Reynolds Number. Fixed and Flapping Wing Aerodynamics for Micro Air Vehicle Applications // *Progress in Aeronautics and Astronautics*, AIAA. Reston, VA, 2001. Vol. 195, ch. 17.
6. Berdnik Y., Beskopylny A. The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate // *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 2019. Vol. 91 (6). P. 807–813.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. Sumbatyan M.A., Scalia A. *Equations of mathematical diffraction Theory*. Boca Raton, FL: CRC Press /Taylor&FrancisGroup, 2005. 291 p.
9. NACA airfoil. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/NACA_airfoil (дата обращения: 27.08.2019).
10. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. N.Y.: McGraw-Hill, 1955. 535 p.

References

1. Schmitz F.W. *Aerodynamics of the Model Airplane*. Huntsville, AL: NASA Marshall Space Flight Center, 1967, 201 p.
2. Althaus D. *Profilpolaren für den Modellflug*. Band 2. GmbH: Neckar-Verlag, 1, 1988, 176 p.
3. Kunz P.J. *Aerodynamics and Design for Ultra-Low Reynolds Number Flight: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy*. Stanford, USA, 2003, 180 p.

4. Sunada S., Kawachi K. Comparison of Wing Characteristics at an Ultralow Reynolds Number. *Journal of Aircraft*. 2002, vol. 39 (2), pp. 331-338.
5. Azuma A., Okamoto M., Yasuda K. Aerodynamics Characteristics of Wings at Low Reynolds Number. Fixed and Flapping Wing Aerodynamics for Micro Air Vehicle Applications. *Progress in Aeronautics and Astronautics*, AIAA, Reston, VA, 2001, vol. 195, ch. 17.
6. Berdnik Y., Beskopylny A. The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 2019, vol. 91 (6), pp. 807-813.
7. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1978, 512 p.
8. Sumbatyan M.A., Scalia A. *Equations of Mathematical Diffraction Theory*. Boca Raton, FL: CRC Press /Taylor&FrancisGroup, 2005, 291 p.
9. *NACA airfoil*. 2006. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/NACA_airfoil (accessed 27.08.2019).
10. Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. New York: McGraw-Hill, 1955, 535 p.

Поступила в редакцию / Received

12 сентября 2019 г. / September 12, 2019

УДК 539.3

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-19-26

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ЕЕ СВОЙСТВ*

© 2019 г. А.О. Ватульян^{1,2}, А.А. Поддубный¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,

²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

ON A MODEL OF DEFORMATION OF AN INHOMOGENEOUS STRIP AND IDENTIFICATION OF ITS PROPERTIES

A.O. Vatulyan^{1,2}, A.A. Poddubny¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia,

²Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

Ватульян Александр Ованесович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия; заведующий отделом дифференциальных уравнений, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, РСО-Алания, 362027, Россия, e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

Alexander O. Vatulyan - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Head of the Department of Differential Equations, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Marcusa St., 22, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, 362027, Russia, e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

Поддубный Алексей Андреевич – аспирант, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: poddubny_sfedu@mail.ru

Alexey A. Poddubny - Postgraduate, Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: poddubny_sfedu@mail.ru

Представлена модель деформирования кусочно-неоднородной в нормальном направлении упругой полосы, состоящей из двух неоднородных полос, при контактном взаимодействии с параболическим штампом. Сформулированы гипотезы о характере изменения компонент поля перемещений, на основе которых с использованием метода Канторовича и вариационного принципа Лагранжа представлена упрощенная постановка задачи. Из вариационного принципа были получены уравнения Эйлера функционала в виде системы двух дифференциальных уравнений четвертого порядка. С помощью интегрального преобразования Фурье найдена связь трансформант вертикального смещения и контактного напряжения. Контактная задача сведена к исследованию интегрального уравнения Фредгольма, причем приближенное выражение символа ядра интегрального уравнения построено на основе упрощенной постановки задачи. Приводится сравнительный анализ результатов прикладной модели и расчетов на основе МКЭ. Представлены результаты зависимостей сила – внедрение, внедрение – величина зоны контакта, а также вертикального смещения. Решение обратной задачи реализовано с использованием метода Прони на базе известной информации о вертикальных смещениях верхней границы полосы на равномерной сетке. Такой подход позволил восстановить закон изменения модуля Юнга кусочно-неоднородной полосы в классе линейных функций при постоянном значении коэффициента Пуассона.

Ключевые слова: упругость, контактная задача, неоднородность, полоса, вариационный метод, обратная задача, идентификация свойств, индентирование.

The paper presents a model of deformation of a piecewise inhomogeneous elastic strip, consisting of two inhomogeneous strips in contact interaction with a parabolic stamp. Hypotheses are formulated on the nature of changes in the components of the displacement field, based on which a simplified statement of the problem is formulated using the Kantorovich method and

* Работа выполнена при частичной поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 9.4726.2017/8.9).

the variational Lagrange principle. From the functional of potential energy and the variational principle, Euler equations were obtained in the form of a system of two fourth-order differential equations. Due to the integral Fourier transform, a relationship was found between the transformants of the vertical displacement and the contact pressure. The contact problem is reduced to the study of the Fredholm integral equation, and an approximate expression of the kernel symbol of the integral equation is constructed on the basis of a simplified statement of the problem. A comparative analysis of the results of the applied model and calculations based on the FEM is presented. The results of the force - penetration, penetration - magnitude of the contact zone, and also vertical displacement are presented. The inverse problem is solved using the Prony method based on the known information about the vertical displacements of the upper boundary of the strip on a uniform grid. This approach allowed us to restore the law of variation of the Young's modulus of a piecewise inhomogeneous strip in the class of linear functions with a constant value of the Poisson's ratio.

Keywords: elasticity, contact problem, heterogeneity, strip, variational method, inverse problem, properties' identification, indentation.

Введение

Эффективным методом улучшения износостойкости различных элементов конструкций является нанесение защитных покрытий (антикоррозионных, термобарьерных и др.) [1–3]. При эксплуатации функционально-градиентных структур с покрытиями возникает ряд проблем. Так, например, концентраторами напряжений являются места резкого изменения физико-механических характеристик, т.е. границы сопряжения материалов. Покрытия с изменяющимися по толщине свойствами позволяют улучшить прочность и износостойкость конструкций из таких материалов и продлить их долговечность. Для успешного использования таких покрытий и оценки их контактной прочности необходима разработка метода определения приповерхностных свойств элементов конструкций из неоднородных материалов.

Одним из наиболее распространенных методов является контактный способ оценки податливости среды, или метод индентирования. Этот метод зарекомендовал себя как эффективный способ определения материальных свойств образцов без их полного разрушения. Основные инженерные формулы, использующиеся в современных устройствах индентирования, базируются на классическом решении контактной задачи Герца [4], а также на популярной модели Оливера – Фарра аппроксимации кривой сила – внедрение [5]. Контактное взаимодействие для функционально-градиентных материалов не всегда может быть описано теорией Герца с удовлетворительной точностью [6, 7] и требует решения новых контактных задач. В этой ситуации необходимо развивать более адекватные математические модели процессов индентирования с учетом неоднородных свойств образцов и покрытий.

Основным методом исследования контактных задач в рамках модели однородной теории упругости является сведение краевой задачи к решению интегрального уравнения с логарифмическим или сингулярным ядром [8]. При решении задач о контактном взаимодействии для неоднородных структур ядро интегрального уравнения не может быть найдено в аналитическом виде и строится либо численно, либо на основе приближенных моделей. В ряде работ были разработаны численно-аналитические схемы построения символа ядра и решения интегрального уравнения для функционально-градиентного покрытия, лежащего на упругом полупространстве [9], а также для непрерывно-неоднородного слоя и полупространства [10]. В [9] для расчета контактных напряжений, возникающих на поверхности, используется двухсторонний асимптотически точный метод решения контактных задач теории упругости для тел с неоднородными покрытиями. Данный метод позволяет получить приближенные полуаналитические решения высокой точности для контактных давлений, возникающих на поверхности неоднородных покрытий при произвольном характере изменения упругих модулей по глубине.

В [11] полученные интегральные уравнения для модели двухслойного основания решены методом больших λ . Асимптотический метод для относительно тонких слоев был применен в [12]. В [13] для задачи с переменной областью контакта использован метод нелинейных граничных уравнений.

Иной подход к решению задач контактного взаимодействия для неоднородных сред заключается в разработке упрощенных моделей основания на основе некоторых допущений [14, 15], что позволяет находить приближенное выражение для ядра интегрального уравнения в аналитическом виде и более простым способом – кривые

сила – внедрение. Созвучные этому подходы для оценки контактного деформирования для кусочно-неоднородной полосы и реализованы в настоящей работе.

Исследования показали, что такие подходы позволяют дать оценку градиентности свойств покрытия и основания и построить решения простых обратных задач для функционально-градиентных материалов с покрытиями.

Постановка задачи

Рассмотрим контактную задачу о внедрении жесткого штампа в упругую двухслойную неоднородную полосу в рамках плоской постановки. Полоса состоит из двух частей: полосы 1 толщиной h_1 и полосы 2 толщиной h_2 . Их свойства изменяются произвольным образом по толщинной координате и могут терпеть разрыв на границе (рис. 1).

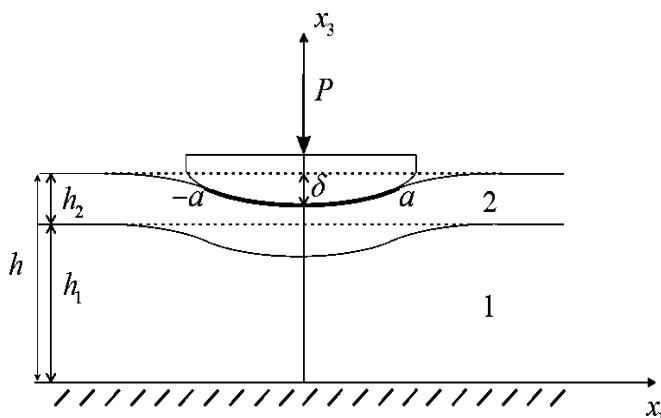


Рис. 1. Схема нагружения / Fig. 1. Loading scheme

Полосу будем считать жестко заземленной по нижнему основанию. Гладкий штамп параболической формы вдавливается в полосу силой P , силы трения между полосой и штампом отсутствуют. Коэффициенты Лямэ – положительные функции вертикальной координаты $\mu = \mu(x_3)$, $\lambda = \lambda(x_3)$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения задачи в плоском случае имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 3,$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right),$$

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}.$$

Граничные условия представимы в форме

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0,$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a,$$

$$u_3(x_1, h) = \delta - \frac{1}{2R} x_1^2, \quad |x_1| \leq a,$$

где a – полуширина области контакта; R – радиус кривизны штампа.

Условие равновесия штампа

$$P(a, \delta) = \int_{-a}^a q(x_1) dx_1.$$

Построение упрощенной модели

Сформулированная смешанная задача для оператора с переменными коэффициентами может быть исследована на основе сведения к интегральному уравнению относительно контактного давления, ядро которого определяется численно [9, 10]. Рассмотрим иной подход для нахождения приближенного решения. В [15] были сформулированы гипотезы, позволяющие анализировать контактные задачи для непрерывных законов неоднородности, однако они не позволяют учесть сопряжение соответствующих компонент тензора напряжений на границе раздела. Для преодоления этой особенности введем в рассмотрение несколько иные гипотезы о характере компонент поля перемещений.

$$u_1^{(1)} = u(x_1) \frac{x_3}{h_1}, \quad u_3^{(1)} = w(x_1) \frac{x_3}{h_1},$$

$$u_1^{(2)} = -\frac{x_3 - h}{h_2} u(x_1) + \frac{x_3 - h_1}{h_2} U(x_1), \quad (1)$$

$$u_3^{(2)} = -\frac{x_3 - h}{h_2} w(x_1) + \frac{x_3 - h_1}{h_2} W(x_1).$$

Верхний индекс соответствует полосе, в которой соответствующая функция определяет перемещения. Свойства каждой из полос могут изменяться произвольным гладким образом по толщинной координате. Функции $u(x_1)$, $w(x_1)$ – смещения на границе слоев $x_3 = h_1$; $U(x_1)$, $W(x_1)$ – смещения на верхней границе $x_3 = h$. Функции (1) выбраны так, что выполняется непрерывность смещений на границе слоев.

Из условий сопряжения на границе полос для компонент вектора напряжений σ_{13} , σ_{33} получаем

$$U = (1 + G_1 \frac{h_2}{h_1})u + h_2(G_1 - 1)w',$$

$$W = h_2 G_2 u' + (1 + G_3 \frac{h_2}{h_1})w, \quad (2)$$

$$\text{где } G_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad G_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}, \quad G_3 = \frac{\lambda_1 - 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2},$$

$$\lambda_1 = \lim_{x_3 \rightarrow h_1 - 0} \lambda(x_3), \quad \lambda_2 = \lim_{x_3 \rightarrow h_1 + 0} \lambda(x_3),$$

$$\mu_1 = \lim_{x_3 \rightarrow h_1 - 0} \mu(x_3), \quad \mu_2 = \lim_{x_3 \rightarrow h_1 + 0} \mu(x_3).$$

Таким образом, гипотезы о структуре полей перемещений принимают вид

$$u_1^{(2)} = (-\frac{x_3 - h}{h_2} + (x_3 - h_1)a_1)u(x_1) + (x_3 - h_1)a_2 w'(x_1),$$

$$u_3^{(2)} = (-\frac{x_3 - h}{h_2} + (x_3 - h_1)b_1)w(x_1) + (x_3 - h_1)b_2 u'(x_1), \quad (3)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}{\mu_2 h_1 h_2}, \quad a_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2},$$

$$b_1 = \frac{h_1(\lambda_2 + 2\mu_2) + h_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{h_1 h_2 (\lambda_2 + 2\mu_2)}, \quad b_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}.$$

Соотношения (3) фактически задают гипотезы ломаной нормали для функционально-градиентной полосы. Для формулировки соответствующих краевых задач для введенных новых функций рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки $q(x_1)$ на отрезке $[-a, a]$ верхней границы полосы. Запишем функционал потенциальной энергии для двухслойной полосы:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^{h_1} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dx_1 dx_3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{h_1}^h \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dx_1 dx_3 - \int_{-a}^a q u_3(x_1, h) dx_1. \quad (4)$$

С учетом принятых гипотез преобразуем функционал (4).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ((A_1 + B_1)u'^2 + (A_2 + B_4)u'w +$$

$$+ (A_3 + B_6)w^2 + (A_4 + B_7)u^2 + (A_5 + B_8)uw' +$$

$$+ (A_6 + B_9)w'^2 + B_2 u' w' + B_3 w'^2 + B_5 w w' +$$

$$+ B_{10} u u'' + B_{11} w' u'' + B_{12} u'^2 - h_2 b_1^* q w - h_2 b_2^* q u') dx_1,$$

где A_i, B_j, B_{ij} – постоянные, представляющие

собой некоторые интегральные характеристики законов неоднородности. В силу громоздкости выражений приведем, например, A_1 и B_{12} :

$$A_1 = \int_0^{h_1} (\lambda_1(x_3) + 2\mu_1(x_3)) \frac{x_3^2}{h_1^2} dx_3,$$

$$B_{12} = \int_{h_1}^h \mu_2(x_3) \left[-\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} h_1 x_3 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right]^2 dx_3.$$

Варьируя упрощенный функционал на основе вариационного принципа Лагранжа и приравнявая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим систему двух дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$2B_{12}u^{IV} - (B_2 - B_{11})w''' + (-2(A_1 + B_1) + 2B_{10})u'' -$$

$$- (A_2 + B_4 - A_5 - B_8)w' + 2(A_4 + B_7)u + 2h_2 b_2^* q' = 0, \quad (5)$$

$$2B_3 w^{IV} + (B_2 - B_{11})u''' + (-2(A_6 + B_9) + 2B_5)w' +$$

$$+ (A_2 + B_4 - A_5 - B_8)u' + 2(A_3 + B_6)w - 2h_2 b_1^* q = 0.$$

На основе вариационного принципа также получены стыковые условия, которые не приводятся в силу громоздкости.

Используя преобразование Фурье и соотношения (2), установим связь между нагрузкой на верхней границе и вертикальным смещением на ней и получим выражение для передаточной функции:

$$\tilde{W} = K(\alpha) \tilde{q}, \quad (6)$$

$$K(\alpha) = \frac{a_3 \alpha^6 + a_2 \alpha^4 + a_1 \alpha^2 + a_0}{b_4 \alpha^8 + b_3 \alpha^6 + b_2 \alpha^4 + b_1 \alpha^2 + b_0}.$$

Переходя от трансформант в (6) к оригиналам, получаем операторное уравнение, связывающее вертикальные смещения с нагрузкой:

$$b_4 W^{(8)} - b_3 W^{(6)} + b_2 W^{(4)} - b_1 W^{(2)} + b_0 W =$$

$$= -a_3 q^{(6)} + a_2 q^{(4)} - a_1 q^{(2)} + a_0 q. \quad (7)$$

Приравнявая вертикальные смещения в зоне контакта к перемещениям штампа и учитывая убывание на бесконечности $W(x_1) \rightarrow 0, (x_1 \rightarrow \infty)$,

$$W = -\delta + \frac{1}{2R} x_1^2, (|x_1| \leq a), \text{ получим, что в зоне}$$

$$\text{контакта операторное уравнение (7) для определения напряжений принимает вид}$$

$$-a_3 q^{(6)} + a_2 q^{(4)} - a_1 q'' + a_0 q = -\frac{b_1}{R} + b_0(-\delta + \frac{1}{2R} x_1^2). \quad (8)$$

Характеристические числа для оператора шестого порядка в левой части (8) имеют вид $\lambda_{1,2} = \pm \lambda$, $\lambda_{3,4} = \varphi \pm i\psi$, $\lambda_{5,6} = \pm \varphi + i\psi$.

Учитывая четность функции $q(x_1)$, находим решение (8) в виде

$$q(x_1) = C_1(e^{\lambda_1 x_1} + e^{\lambda_2 x_1}) + (C_2 + iC_3)(e^{\lambda_3 x_1} + e^{\lambda_4 x_1}) + (C_2 - iC_3)(e^{\lambda_5 x_1} + e^{\lambda_6 x_1}) + B_{01}x_1^2 + B_{00}.$$

Подставляя найденное решение в систему дифференциальных уравнений (5), найдем решение для функций u , w . Решая систему из 8 уравнений на основе стыковых условий, определим 7 неизвестных констант и параметр δ . Они зависят от параметра a и в силу громоздкости не приведены.

Результаты численного исследования прямой задачи

Далее представлены результаты вычислительных экспериментов для некоторых законов неоднородности (кусочно-линейных и кусочно-квадратичных; для простоты далее считаем толщину полосы равной 1):

- I) $\lambda_1(x_3) = 0,5x_3 + 0,5$; $\lambda_2(x_3) = -1,1x_3 + 3$;
 $\mu_1(x_3) = x_3 + 2$; $\mu_2(x_3) = -1,5x_3 + 3,2$;
 II) $\lambda_1(x_3) = -1,6x_3 + 5$; $\lambda_2(x_3) = x_3 + 2,7$;
 $\mu_1(x_3) = -1,6x_3 + 3$; $\mu_2(x_3) = x_3 + 4,3$;
 III) $\lambda_1(x_3) = -0,5x_3^2 + 0,7$; $\lambda_2(x_3) = -1,1x_3 + 3$;
 $\mu_1(x_3) = -x_3^2 + 2$; $\mu_2(x_3) = -1,5x_3 + 3,2$.

В формулах нижний индекс задает номер слоя, в котором закон определяет неоднородные свойства. Группа I): слой 1 – возрастающие линейные законы, слой 2 – убывающие; группа II): слой 1 – убывающие линейные законы, слой 2 – возрастающие; в группе III) представлены квадратичные убывающие законы в слое 1 и линейные убывающие в слое 2. Геометрические параметры слоев задаются соотношениями $h_1 = 0,9$, $h_2 = 0,1$. На рис. 2 представлен график вертикального смещения верхней границы полосы в приконтактной зоне. Рисунок 3 показывает зависимость силы, действующей на штамп, от внедрения.

Зависимость внедрение – величина зоны контакта представлена на рис. 4. Кривые обозначены римскими цифрами по группам соответствующих им законов.

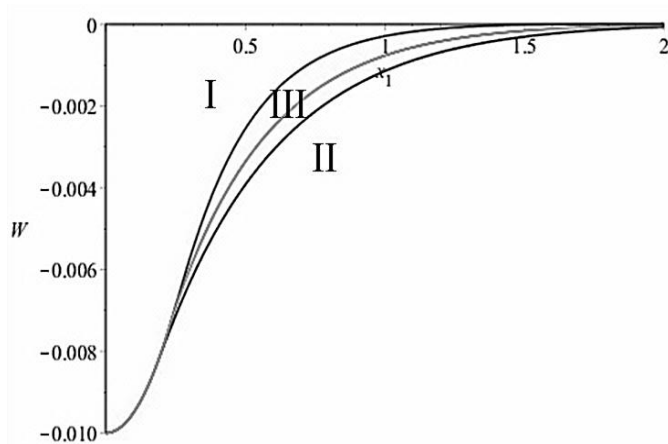


Рис. 2. Вертикальное смещение верхней границы
/ Fig. 2. Vertical displacement of an upper border

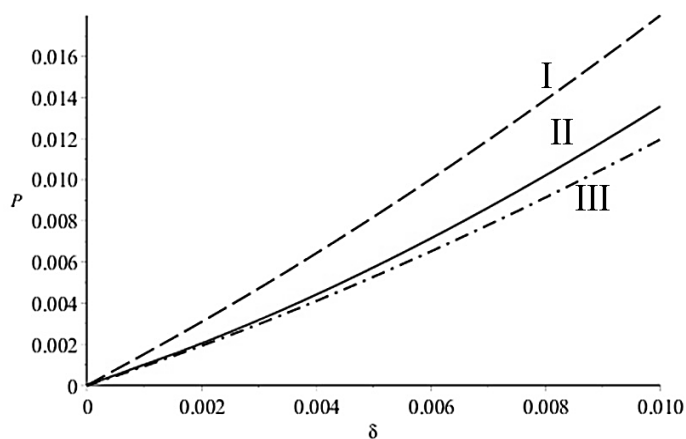


Рис. 3. Зависимость сила – внедрение
/ Fig. 3. Relation force-penetration

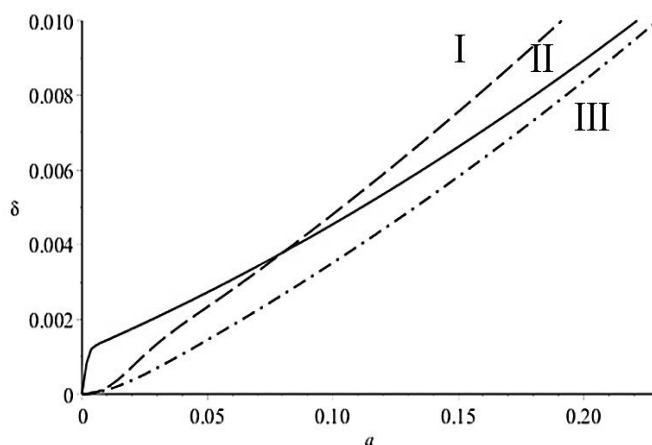


Рис. 4. Зависимость внедрение – величина зоны контакта
/ Fig. 4. Relation penetration - contact zone

Ниже представлены сравнительные результаты для предложенной модели и модели, построенной на основе метода конечных элементов (КЭ). Конечноэлементная модель рассчитана для прямоугольника конечной длины $2l$ с соотношением $h/l = 0,2$. Для реализации модели использован КЭ-пакет ANSYS. Применены конечные элементы PLANE182. В качестве контактных элементов были использованы CONTA172, TARGET169. В КЭ-модели непрерывные законы неоднородности смоделированы путем создания многослойного тела (10 слоев) с различными значениями параметров Лямэ в слоях. Радиус закругления штампа и соотношение толщин слоев: $R=10h$, $h_2=0,1h_1$. Результаты для прикладной модели представлены сплошной линией, результаты для КЭ-модели – прерывистой (рис. 5, 6).

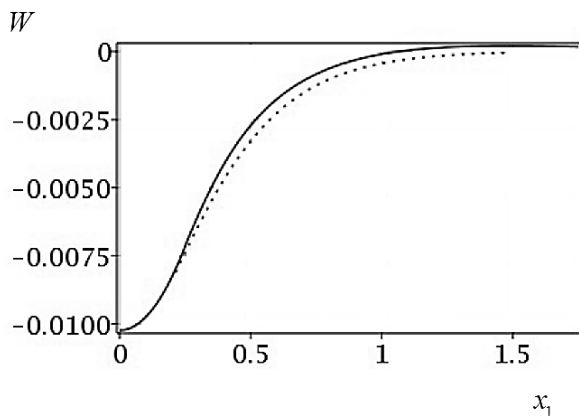


Рис. 5. Вертикальное смещение верхней границы
/ Fig. 5. Vertical displacement of an upper border

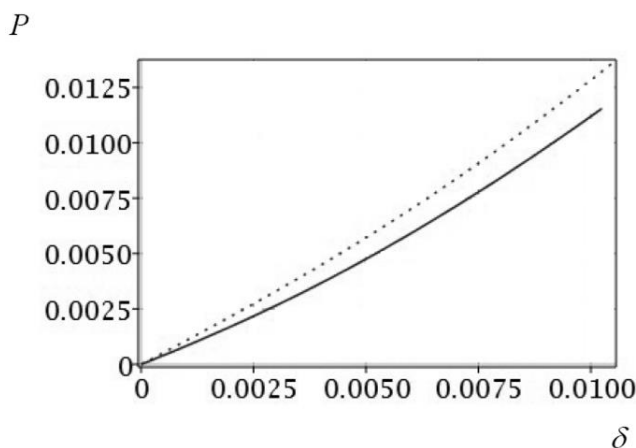


Рис. 6. Зависимость сила – внедрение
/ Fig. 6. Relation force-penetration

Результаты сравнительного анализа свидетельствуют о том, что приближенная модель дает завышенное значение смещения на верхней границе и заниженное значение зависимости сила – внедрение.

Обратная задача (ОЗ)

Исследуем ОЗ об определении законов неоднородности покрытия (слоя 2) $\lambda_2(x_3)$, $\mu_2(x_3)$ по информации о вертикальном смещении верхней границы полосы вблизи контактной зоны. Рассмотрим простейший вариант изменения законов неоднородности в виде линейных зависимостей. В самом простом варианте будем считать, что требуется определить k_i , характеризующие законы неоднородности покрытия следующего вида:

$$\lambda_2(x_3) = \frac{-(k_1 - k_2)(x_3 - h)}{h_2} + k_2, \quad (9)$$

$$\mu_2(x_3) = \frac{-(k_3 - k_4)(x_3 - h)}{h_2} + k_4.$$

Отметим, что $\lambda_2(h) = k_2$, $\mu_2(h) = k_4$,

$$\lambda_2(h_1) = k_1, \quad \mu_2(h_1) = k_3.$$

Операторное и характеристическое уравнения для определения перемещений вне зоны контакта имеют вид

$$W^{(8)} - \frac{b_3}{b_4} W^{(6)} + \frac{b_2}{b_4} W^{(4)} - \frac{b_1}{b_4} W^{(2)} + \frac{b_0}{b_4} W = 0,$$

$$\lambda^8 - \frac{b_3}{b_4} \lambda^6 + \frac{b_2}{b_4} \lambda^4 - \frac{b_1}{b_4} \lambda^2 + \frac{b_0}{b_4} = 0,$$

причем

$$b_0 = D_5 D_{10}, \quad b_1 = D_4 D_9 - D_3 D_{10} - D_5 D_8,$$

$$b_2 = D_1 D_{10} + D_5 D_6 + D_3 D_8 + D_4 D_7 + D_2 D_9,$$

$$b_3 = D_2 D_7 - D_1 D_8 - D_3 D_6, \quad b_4 = D_1 D_6, \quad \text{где}$$

$$D_1 = 2B_{12} = 2 \int_{h_1}^h \mu_2(x_3) \left[-\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} h_1 x_3 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right]^2 dx_3.$$

Пусть информация о смещении на верхней границе полосы известна на равномерной сетке с шагом Δ :

$$W(x_k) = \sum_{i=1}^4 W_i e^{\lambda_i x_k}, \quad k=1 \dots 8, \quad x_k = x_0 + \Delta k.$$

Тогда с помощью метода Прони [16] задача об определении коэффициентов W_i и параметров в

показателе λ_i сводится к последовательному решению линейных систем и нахождению корней полиномов.

$$\lambda^8 - a_3\lambda^6 + a_2\lambda^4 - a_1\lambda^2 + a_0 = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i)(\lambda + \lambda_i).$$

При решении обратной задачи была получена алгебраическая система из четырех уравнений относительно параметров k_i .

Рассмотрим несколько вариантов решения ОЗ.

1. Пусть на поверхности слоя-покрытия известны значения функций $\lambda_2(h) = k_2$, $\mu_2(h) = k_4$. Чтобы восстановить законы неоднородности в классе линейных функций, нужно определить параметры k_1 и k_3 . Имея информацию о вертикальном смещении верхней границы слоя в 8 точках и используя метод Прони, получим алгебраическую систему для определения k_1 и k_3 .

2. Будем считать коэффициент Пуассона постоянным, а модуль упругости – линейной функцией. В этом случае необходимо определить 3 параметра.

3. Предположим, что коэффициенты Лямэ в каждой полосе заданы как некоторые линейные функции формулами (9), необходимо определить 4 параметра.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что в первых двух случаях параметры восстановлены с относительной погрешностью не более 0,001 %. В третьем случае оказалось, что в такой постановке ОЗ не имеет единственного решения. Так, в тестовом примере в качестве входных данных были рассмотрены значения параметров: $k_1=0,1$, $k_2=0,2$, $k_3=0,3$, $k_4=0,4$. В результате решения ОЗ получены следующие наборы параметров:

$$k_1 = 0,101, \quad k_2 = 0,199, \quad k_3 = 0,300, \quad k_4 = 0,399;$$

$$k_1 = 0,813, \quad k_2 = 0,191, \quad k_3 = 0,299, \quad k_4 = 0,256,$$

что свидетельствует о том, что в этой ситуации входной информации недостаточно для единственного решения сформулированной задачи.

Заключение

В работе представлена прикладная модель контактного взаимодействия двухслойной упругой неоднородной по толщине полосы и жесткого штампа. Проведен сравнительный анализ результатов численных исследований таких характеристик, как вертикальное смещение, зависимость

сила – внедрение, зависимость внедрение – величина зоны контакта. Модель показала неплохое совпадение с КЭ-моделированием. На основе разработанной модели решена обратная задача определения линейных законов неоднородности по информации о вертикальном смещении верхней границы полосы на регулярной сетке. Проанализированы различные случаи определения законов неоднородности по заданной информации.

Литература

1. Lackner J.M., Waldhauser W., Major L., Kot M. Tribology and Micromechanics of Chromium Nitride Based Multilayer Coatings on Soft and Hard Substrates // Coatings. 2014. Vol. 4. P. 121–138.
2. Chen J., Geng M., Li Y., Yang Zh., Chai Y., He G. Erosion Resistance and Damage Mechanism of TiN/ZrN Nanoscale Multilayer Coating // Coatings. 2019. Vol. 9. P. 64–75.
3. Szala M., Walczak M., Pasierbiewicz K., Kaminski M. Cavitation erosion and sliding wear mechanisms of AlTiN and TiAlN films deposited on stainless steel substrate // Coatings. 2019. Vol. 9. P. 340–356.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М.И. Рейтмана; под ред. Г.С. Шапиро. М.: Наука, 1975. 576 с.
5. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. Mater. Res. 2004. Vol. 19, № 1. P. 3–20.
6. Broitman E. Indentation Hardness Measurements at Macro-, Micro- and Nanoscale: A Critical Overview // Tribol Lett. 2017. Vol. 65. P. 23–41.
7. Головин Ю.И. Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикроробъектах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, вып. 12. С. 2113–2142.
8. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34.
10. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Кренин Л.И., Трубочник И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
11. Чебаков М.И., Колосова Е.М. Контактные задачи для двухслойных оснований и методы их решений // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XIV междунар. конф., г. Азов, 20–23 июня 2010 г. Ростов н/Д.: ЦВВР, 2010. С. 339–342.

12. Чебаков М.И. К теории расчета двухслойного цилиндрического подшипника // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 163–170.

13. Чебаков М.И. Контактная задача для двойного слоя с учетом сил трения // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2005. № 3. С. 22–24.

14. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Сарат. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 421–432.

15. Ватульян А.О., Плотников Д.К. Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Докл. Академии наук. Механика. 2019. Т. 485, № 5. С. 564–567.

16. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.

References

1. Lackner J.M., Waldhauser W., Major L., Kot M. Tribology and Micromechanics of Chromium Nitride Based Multilayer Coatings on Soft and Hard Substrates. *Coatings*. 2014, vol. 4, pp. 121–138.

2. Chen J., Geng M., Li Y., Yang Zh., Chai Y., He G. Erosion Resistance and Damage Mechanism of TiN/ZrN Nanoscale Multilayer Coating. *Coatings*. 2019, vol. 9, pp. 64–75.

3. Szala M., Walczak M., Pasierbiewicz K., Kaminski M. Cavitation erosion and sliding wear mechanisms of Al-TiN and TiAlN films deposited on stainless steel substrate. *Coatings*. 2019, vol. 9, pp. 340–356.

4. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Tr. from Engl. by M.I. Reitman; Ed. G.S. Shapiro. Moscow: Nauka, 1975, 576 p.

5. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *J. Mater. Res.* 2004, vol. 19, No. 1, pp. 3–20.

6. Broitman E. Indentation Hardness Measurements at Macro-, Micro- and Nanoscale: A Critical Overview. *Tribol Lett.* 2017, vol. 65, pp. 23–41.

7. Golovin Yu.I. Nanoindentirovanie i mekhanicheskie svoystva tverdykh tel v submikroob'emakh, tonkikh poverkhnostnykh sloyakh i plenkakh [Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin

surface layers and films]. *Fizika tverdogo tela*. 2008, vol. 50, iss. 12, pp. 2113–2142.

8. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problems of the theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

9. Volkov S.S., Vasil'ev A.S., Aizikov S.M., Seleznev N.M., Leont'eva A.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uprugogo myagkogo funktsional'no-gradientnogo pokrytiya pri vnedrenii sfericheskogo indentora [Stress-strain state of an elastic soft functional-gradient coating with the introduction of a spherical indenter]. *Vestn. PNIPU. Mekhanika*. 2016, No. 4, pp. 20–34.

10. Aizikov S.M., Aleksandrov V.M., Belokon' A.V., Krenev L.I., Trubchik I.S. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred* [Contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous media]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 240 p.

11. Chebakov M.I., Kolosova E.M. [Contact problems for two-layer bases and methods for their solutions]. *Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoi sredy* [Modern problems of continuum mechanics]. Proceedings of the XIV International Conference. Azov, June 20–23, 2010. Rostov-on-Don: TsVVR, 2010, pp. 339–342.

12. Chebakov M.I. K teorii rascheta dvukhsloinogo tsilindricheskogo podshipnika [On the theory of calculating a two-layer cylindrical bearing]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2009, No. 3, pp. 163–170.

13. Chebakov M.I. Kontaktnaya zadacha dlya dvoynogo sloya s uchetom sil treniya [Contact problem for a double layer taking into account friction forces]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2005, No. 3, pp. 22–24.

14. Vatul'yan A.O., Plotnikov D.K., Poddubnyi A.A. O nekotorykh modelyakh indentirovaniya funktsional'no-gradientnykh pokrytii [On some models of indentation of functional gradient coatings]. *Izv. Sarat. un-ta. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 421–432.

15. Vatul'yan A.O., Plotnikov D.K. Ob odnoi modeli indentirovaniya funktsional'no-gradientnoi polosy [On one model of indentation of a functional gradient strip]. *Dokl. Akademii nauk. Mekhanika*. 2019, vol. 485, No. 5, pp. 564–567.

16. Vatul'yan A.O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2019, 272 p.

УДК 532.5, 556

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-27-35

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ИЗОТАХОФОРЕЗЕ*

© 2019 г. М.Ю. Жуков^{1,2}, О.А. Цывенкова¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,

²Южный математический институт ВИЦ РАН, Владикавказ, Россия

SIMULATION OF GRAVITATIONAL CONCENTRATION CONVECTION IN ISOTACHOPHORESIS

M.Yu. Zhukov^{1,2}, O.A. Tsyvenkova¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia,

²Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

Жуков Михаил Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Ворovichа, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия; профессор, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, Владикавказ, РСО-А, 362027, Россия, e-mail: myzhukov@srfedu.ru

Michael Yu. Zhukov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Professor, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Markusa St., 22, Vladikavkaz, RNO-A, 362027, Russia, e-mail: myzhukov@srfedu.ru

Цывенкова Ольга Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Ворovichа, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: oacyvenkova@srfedu.ru

Olga A. Tsyvenkova - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: oacyvenkova@srfedu.ru

Построена математическая модель, описывающая гравитационную концентрационную конвекцию при изотахофореze – методе разделения многокомпонентной смеси на индивидуальные компоненты при помощи внешнего электрического поля. В финальной стадии процесса изотахофореze смесь разделяется на отдельные компоненты, образуя пространственные зоны, границы которых движутся с одинаковой скоростью. Концентрации веществ в зонах почти всюду постоянны, за исключением малых окрестностей границ. В процессе разделения возникает сильная пространственная стратификация жидкости по плотности. В гравитационном поле возможно возникновение конвективной неустойчивости, которая может приводить к разрушению границы между зонами и перемешиванию разделившихся компонент смеси, снижая разрешающую способность метода.

Задача исследования конвективного перемешивания сводится к отысканию критических значений параметров – характерного коэффициента диффузии, подвижностей, коэффициентов концентрационного сжатия и т. п. Ввиду того что размеры отдельных зон, как правило, много больше, чем ширина границы между зонами, достаточно ограничиться исследованием в окрестности границы раздела лишь между двумя какими-либо зонами. Точную постановку задачи гидродинамической устойчивости предлагается заменить асимптотической моделью, основные особенности которой заключаются в следующем. Во-первых, задача на бесконечной оси заменяется на задачу в области, в которой концентрации компонент существенно отличаются от постоянных. Во-вторых, уравнения переноса вещества заменяются на их аналоги, справедливые в окрестности границы. В частности, последнее предположение позволяет заменить действительные распределения концентрации веществ в окрестности границы, описываемые функцией Лерха, на линейные распределения.

* Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Ключевые слова: конвективная неустойчивость, вязкая жидкость, разделение многокомпонентной смеси, изотахофорез.

A mathematical model describing gravitational concentration convection under isotachopheresis, a method of separating a multicomponent mixture into individual components using an external electric field, is constructed. In the final stage of the isotachopheresis process, the mixture is divided into separate components, forming spatial zones whose boundaries move at the same velocity. The concentrations of substances in the zones are almost everywhere constant except in the small vicinity of the boundaries. In the process of separation, there is a strong spatial stratification of the liquid density. In the gravitational field, convective instability may occur, which can lead to the destruction of the boundary between the zones and the mixing of the separated components, reducing the resolution of the method.

The convective mixing problem is reduced to finding critical values of parameters – characteristic of the diffusion coefficient, mobilities, concentration etc. Due to the fact that the size of individual zones, usually much more than the width of the boundary between the zones, it is sufficient to only study problem in the vicinity of the boundary between the two any zones. The exact formulation of the problem of hydrodynamic stability is proposed to replace the asymptotic model, the main features of which are as follows. First, the problem on the infinite axis is replaced by a problem in the domain in which the component concentrations differ significantly from the constants. Secondly, the transport mass equations are replaced by their analogues, which are valid in the vicinity of the boundary. In particular, the latter assumption allows us to replace the real distributions of the concentration of substances in the vicinity of the boundary, described by the Lerch function, by linear distributions.

Keywords: convective instability, viscous liquid, multicomponent mixture separation, isotachopheresis.

Введение

Метод изотахофореза предназначен для разделения многокомпонентных смесей на индивидуальные компоненты при помощи электрического поля. В электрофоретическую камеру, представляющую собой длинный тонкий капилляр, разделяемая смесь помещается между двумя эталонными электролитами, имеющими наименьшую и наибольшую подвижность в электрическом поле (терминатор и лидер). В финальной стадии вещества смеси, имеющие различную подвижность, в процессе разделения образуют пространственные зоны, содержащие лишь одну компоненту смеси и движущиеся с постоянной скоростью. Подробное описание процесса изотахофореза, который также иногда называется методом подвижной границы, имеется, например, в [1, 2]. Математические модели процесса в бездиффузионном приближении построены в [3–10], детальное описание процесса разделения смеси при изотахофорезе дано в [6, 10], вычислительные эксперименты, результаты которых хорошо совпадают с экспериментами, описаны, в частности, в [11].

Основными факторами, влияющими на разрешающую способность метода – ширину границы между отдельными зонами – в случае капиллярных электрофоретических камер (пространственно одномерных), являются напряженность

электрического поля и эффекты диффузии. Влияние указанных факторов на ширину границы между зонами на основе математических моделей исследовано в [10, 12] и качественно, например, в [13]. В случае пространственно неоднородных камер при препаративном изотахофорезе (выделение веществ в больших количествах) на ширину зоны существенно влияет гравитационная концентрационная конвекция.

Дело в том, что при разделении смеси на зоны, содержащие отдельные компоненты, возникает сильная пространственная стратификация смеси по плотности, так как индивидуальные вещества имеют различную плотность. На границе между тяжелой и легкой зонами в поле тяжести возникает конвективное перемешивание жидкости (неустойчивость типа Рэлея – Тейлора), которое может полностью разрушить границу между зонами. Следует сказать, что проблемам конвективного перемешивания в задачах переноса массы электрическим полем, в частности, в задачах электрофореза, уделяется недостаточно внимания. Имеются лишь отдельные работы [10, 12, 14–18], в которых такие проблемы частично изучены. Применительно к задачам изотахофореза конвективная неустойчивость границ зон частично исследована в монографии [12], в которой, в частности, дан обзор состояния проблемы и намечены пути дальнейшего развития теории.

Предлагаемая ниже работа является реализацией некоторых идей монографии [12], более конкретно, построения грубой асимптотической модели, описывающей конвекцию в окрестности границы между двумя зонами [12, с. 68, 69]. В случае плоской горизонтальной границы между двумя зонами (бесконечными слоями жидкости), перпендикулярной действию силы тяжести, критические значения параметров (характерный коэффициент диффузии, напряженность электрического поля, подвижность компонент) для некоторого примера вычислены в [12, с. 54–56]. Одна из трудностей численного решения задачи конвекции заключается в том, что решение задачи о механическом равновесии, хотя и находится явно, содержит трудновычисляемую трансцендентную функцию Лерха [19, с. 43–46; 12, с. 64, 65]. Другая трудность – приходится исследовать так называемую задачу об устойчивости со сдвигом, в данном случае в движущейся системе отсчета [20].

Схематичный вид профилей концентрации u^1 , u^2 и проводимости смеси $S = u^1 + u^2$ в окрестности границы между двумя соседними зонами в случае механического равновесия показан на рис. 1. Хорошо видно, что существенное отличие концентраций компонент $u^1(z)$, $u^2(z)$ от констант наблюдается лишь в области границы $z_1 < z < z_2$. Именно в этой области имеется градиент концентраций, который в зависимости от знака градиента приводит либо к устойчивости, либо неустойчивости механического равновесия [21]. Достаточно очевидно, что наиболее опасной для возникновения неустойчивости является окрестность границы между зонами. Ввиду этого предлагается заменить сложную полную модель «грубой» асимптотической, заменяя профили концентраций для полной модели линейными профилями концентраций. Сформулируем основные гипотезы для асимптотической модели:

- i. Бесконечная область заменяется конечной $z_1 < z < z_2$, шириной $W = z_2 - z_1$, т.е. областью, наиболее опасной с точки зрения возникновения неустойчивости.
- ii. Точки z_1, z_2 определяются как точки пересечения касательной линии $\tilde{S}(z) = S_z(0)z + S(0)$ к функции $S(z)$ в точке перегиба $S_{zz}(0) = 0$ (рис. 1).
- iii. Точные уравнения, описывающие процесс переноса концентраций u^k электрическим полем с учетом диффузии, заменяются уравнениями диффузии – переноса, имеющими в стационарном случае линейные по переменной z решения.

Отметим, что последнее наиболее существенное и нетривиальное предположение не эквивалентно замене профилей концентраций в окрестности границы линейными функциями. Во-первых, точки перегиба функций $u^1, u^2, S(z)$ различны и замена профилей касательными привела бы к неоднозначности определения области окрестности границы. Во-вторых, простая замена в полной задаче одних функций на другие привела бы к некорректности постановки задачи об устойчивости – исходная задача оказалась бы линейаризованной на некотором произвольном решении, а не на решении, соответствующем механическому равновесию.

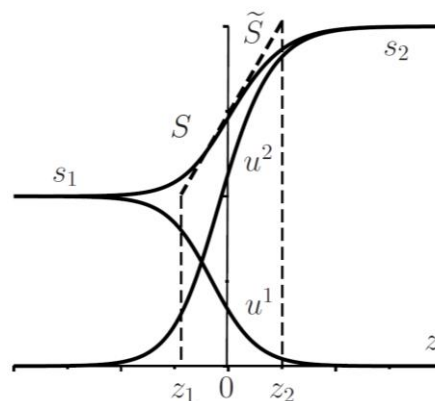


Рис. 1. Окрестность границы между двумя зонами: $S(-\infty) = s_1$; $S(+\infty) = s_2$; $\tilde{S}(z_1) = s_1$; $\tilde{S}(z_2) = s_2$; $z = x_3 - Vt$; x_3 – вертикальная координата; V – скорость движения границы между зонами / Fig. 1. The neighborhood of the boundary between the two zones: $S(-\infty) = s_1$; $S(+\infty) = s_2$; $\tilde{S}(z_1) = s_1$; $\tilde{S}(z_2) = s_2$; $z = x_3 - Vt$; x_3 - vertical coordinate; V - velocity of the boundary between zones

Для построенной указанным образом асимптотической модели с помощью метода нормальных мод [21] сформулированы спектральные задачи, позволяющие определять критические значения, при которых возможно возникновение монотонной (нейтральной) или колебательной неустойчивости в линейном приближении для механического равновесия. Критические значения параметров вычислены при помощи метода пристрелки. Модель справедлива для случая, когда ширина границы между зонами достаточно мала, т.е. в области, где возможна замена функций, описывающих механическое равновесие, линейными функциями. Учитывая, что $W \sim \varepsilon$, где ε – характерный коэффициент диффузии [12, 10], асимптотическая модель применима в случае достаточно малых ε .

Основные уравнения и соотношения

Процесс изотохофореза описываем системой уравнений в безразмерных переменных [12, (5.1)–(5.5), (5.7); 10]

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} - \sum_m \beta^m u^m \mathbf{k}, \quad (1)$$

$$\frac{du^k}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{i}^k = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{i}^k = -\varepsilon \mu^k \nabla u^k + \mu^k u^k \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = S \mathbf{E}, \quad \sigma = \sum_m u^m, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (5)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость; p – давление; u^k – эффективная концентрация компоненты; $\mathbf{i}^k$ – плотность потока концентрации; μ – кинематическая вязкость смеси; β^k – коэффициент концентрационного сжатия; $\mu^k > 0$ – подвижность компоненты в электрическом поле (скорость переноса); $\varepsilon \mu^k$ – коэффициент диффузии; $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля; φ – потенциал электрического поля; $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока; S – проводимость смеси; $\mathbf{k}$ – орт оси x_3 ; верхние индексы – нумерация компонент.

Неизвестными являются скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, давление $p(\mathbf{x}, t)$, концентрации $u^k(\mathbf{x}, t)$ и потенциал $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Все параметры предполагаются постоянными и известными.

Механическое равновесие

Разыскиваем решение уравнений (1)–(5), соответствующее механическому равновесию ($\mathbf{v} = 0$), ограничиваясь рассмотрением лишь одной границы между соседними зонами, которые возникают в стационарной финальной стадии процесса изотохофореза. В этом случае система (1)–(5) сводится к двум уравнениям

$$\partial_t u^k + \partial_{x^3} \left(-\varepsilon \mu^k \partial_{x^3} u^k + j_0 \frac{\mu^k u^k}{S} \right) = 0, \quad (6)$$

$$S = u^1 + u^2, \quad k = 1, 2, \quad 0 < \mu^1 < \mu^2.$$

Здесь предполагается, что движение компонент смеси происходит вдоль оси x^3 ; j_0 – заданная плотность тока; S – проводимость смеси.

Для построения решения вводим автомодельную переменную (переход в систему координат, движущуюся со скоростью V)

$$z = x^3 - Vt \quad (7)$$

и разыскиваем автомодельное решение

$$u^k = u^k(z) \text{ с условиями при } z = \mp \infty$$

$$u^1(-\infty) = s_1, \quad u^1(+\infty) = 0, \quad (8)$$

$$u^2(-\infty) = 0, \quad u^2(+\infty) = s_2,$$

где s_1, s_2 – известные постоянные концентрации (совпадающие в безразмерных переменных с проводимостями).

Опуская подробности построения решения задачи (6)–(8) [10, 12, с. 29–34], приведем соотношения для $u^1(z), u^2(z), S(z)$

$$u^1(y) = \frac{S(y)}{1+y}, \quad u^2(y) = \frac{yS(y)}{1+y}, \quad (9)$$

$$S(y) = \frac{j_0}{\varepsilon \Lambda} (1+y) y^{-\delta} \int_0^y \frac{\tau^{\delta-1} d\tau}{1+\tau}.$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} S(y) = s_1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} S(y) = s_2,$$

$$y = y_0 e^{\Lambda z}, \quad y_0 S_{yy}(y_0) + S_y(y_0) = 0, \quad (10)$$

$$\Lambda = \frac{V(\mu^2 - \mu^1)}{\mu^1 \mu^2 \varepsilon} > 0, \quad \delta = \frac{\mu^2}{\mu^2 - \mu^1} > 1,$$

$$V = \frac{j_0 \mu^1}{s^1} = \frac{j_0 \mu^2}{s^2} > 0. \quad (11)$$

В [10] показано, что корень уравнения (10) для определения y_0 зависит лишь от δ , удовлетворяет оценке $\delta(\delta - 1)^{-1} < y_0 < \infty$ и для вычисления y_0 можно использовать метод Ньютона, выбирая в качестве начального приближения $y_0 = \delta(\delta - 1)^{-1}$. Приведем соотношения, которые потребуются при построении асимптотической модели [12, с. 66, 67]

$$S_{zz}(0) = 0, \quad S_z(z) = \Lambda y S_y,$$

$$S_{zz}(z) = y \Lambda^2 (y S_{yy}(y) + S_y(y)).$$

Решение задачи (6)–(8) в виде (9) (см. рис. 1) описывает структуру ударной волны, в которую это решение вырождается при $\varepsilon \rightarrow +0$ (отсутствие диффузии). Функция $S(y)$ представляет собой один из вариантов записи трансцендентной функции Лерха при помощи интегралов [19, с. 43–46; 12, с. 64, 65].

Обратим внимание, что решение задачи (6)–(8) возможно только при выполнении условий (10), которые известны как условия Кольрауша [1–3, 5–13]. Иными словами, концентрации веществ в зонах вне окрестности границ между зонами в финальной стадии процесса не являются произвольными, а связаны между собой подвижностью веществ в электрическом поле. Именно выполнение условий Кольрауша приводит к тому, что все границы между зонами движутся с одинаковой постоянной скоростью. Это, в частности, оправдывает использование перехода (7) в движущуюся систему координат не только для окрестности границы между зонами, а для всей задачи (1)–(5) в целом.

Асимптотическая модель конвекции

При численном исследовании полной модели конвекции, как уже говорилось, одна из трудностей связана с вычислением функций, описывающих механическое равновесие, а также с бесконечностью области в направлении оси x^3 . Считая, что основной вклад в конвективное перемещение вносит окрестность границы между зонами, рассматриваем лишь область $z_1 < z < z_2$, где z_1, z_2 – точки пересечения касательной $\tilde{S} = S_z(0)z + S(0)$ к функции $S(z)$ в точке перегиба $z = 0$ с линиями $S = s_1, S = s_2$ (см. рис. 1). $S_z(0)z_1 + S(0) = s_1, S_z(0)z_2 + S(0) = s_2, S_{zz}(0) = 0$.

Сконструируем уравнения диффузии – переноса, которые в движущейся системе координат (7) в стационарном случае имеют линейные решения. Для этого заменим уравнения (2), (3) следующими:

$$\frac{du^i}{dt} + \text{div}(-\varepsilon\mu^i\nabla u^i + u^i V\mathbf{k}) = 0. \quad (12)$$

Здесь принято во внимание, что в финальной стадии процесса изотаксифореза вне окрестности границы в силу уравнения (4) и условий Кольрауша (11) выполнены соотношения

$$j_0 = s_1 E^1, j_0 = s_2 E^2, \mu^1 E^1 = \mu^2 E^2 = V, E^{1,2} = \mathbf{E}(\mp\infty) \cdot \mathbf{k}.$$

В стационарном случае в движущейся системе координат уравнения (12) принимают вид

$$-Vu_z^i - \varepsilon\mu^i u_{zz}^i + Vu_z^i = 0, i = 1, 2. \quad (13)$$

Добавляя условия сшивания решения внутри области $z_1 < z < z_2$ с решением вне области

$$u^1(z_1) = s_1, u^1(z_2) = 0, \quad (14)$$

$$u^2(z_1) = 0, u^2(z_2) = s_2,$$

получим решение задачи (13), (14), соответствующее механическому равновесию, в виде линейных функций

$$u_0^1(z) = s_1 \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, u_0^2(z) = s_2 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (15)$$

Заметим, что такое решение, справедливое в области $z_1 < z < z_2$, в принципе, можно считать и решением на всей бесконечной оси со слабыми разрывами в точках z_1, z_2 .

Таким образом, сохраняя «гидродинамическую часть» задачи, т.е. уравнения (1), заменяя уравнения (2)–(5) на (12), получим асимптотические уравнения, которые запишем в движущейся системе координат (x_1, x_2, z) для концентраций u^i и горизонтальной $\mathbf{u}$ и вертикальной w компонент скорости $\mathbf{v} = \mathbf{u} + w\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \text{div}_0 \mathbf{u} + w_z &= 0, \quad \rho = \beta^1 u^1 + \beta^2 u^2, \quad (16) \\ \mathbf{u}_t - V\mathbf{u}_z + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 \mathbf{u} + w\mathbf{u}_z &= -\nabla_0 p + \mu \Delta \mathbf{u}, \\ w_t - Vw_z + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 w + ww_z &= -p_z + \mu \Delta w - \rho, \\ u_t^i + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 u^i + wu_z^i &= \varepsilon\mu^i \Delta u^i, \quad \nabla_0 = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}), \\ \text{div}_0 \mathbf{u} &= \nabla_0 \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Краевые условия (14), соответствующие свободным плоским недеформируемым непроницаемым границам области $z_1 < z < z_2$:

$$\begin{aligned} w(z_1) &= 0, \quad \partial_z^2 w(z_1) = 0, \\ w(z_2) &= 0, \quad \partial_z^2 w(z_2) = 0. \end{aligned}$$

Здесь приведена только часть условий, которые потребуются далее для записи спектральной задачи. Полные краевые условия для жидкости на свободной недеформируемой границе см., например, в [21].

Спектральная задача

Для отыскания критических значений параметров потери устойчивости механического равновесия линеаризуем задачу (16), (14) в окрестности решения $\mathbf{u} = 0, w = 0$ и (14), сохраняя прежние обозначения $u^i, \mathbf{u}, w$ для бесконечно малых возмущений:

$$\begin{aligned} \text{div}_0 \mathbf{u} + w_z &= 0, \quad \rho = \beta^1 u^1 + \beta^2 u^2, \\ \mathbf{u}_t - V\mathbf{u}_z &= -\nabla_0 p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_t - Vw_z &= -p_z + \mu \Delta w - \rho, \\ u_t^i + w \partial_z u_0^i &= \varepsilon\mu^i \Delta u^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(z_1) &= 0, \quad \partial_z^2 w(z_1) = 0, \\ w(z_2) &= 0, \quad \partial_z^2 w(z_2) = 0, \\ u^1(z_1) &= 0, \quad u^1(z_2) = 0, \\ u^2(z_1) &= 0, \quad u^2(z_2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение задачи (17), (18) разыскиваем в виде нормальных мод, периодических по направлениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, перпендикулярным z , с периодами $2\pi/\alpha_1, 2\pi/\alpha_2$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}, w\} &= \{\bar{\mathbf{u}}(z), \bar{w}(z)\} e^{\lambda t + i\alpha \cdot \mathbf{x}}, \\ \{p, u^k\} &= \{\bar{p}(z), \bar{u}^k(z)\} e^{\lambda t + i\alpha \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – волновой вектор; λ – спектральный параметр.

Обычные формальные замены $\partial_t \rightarrow \lambda, \nabla_0 \rightarrow i\alpha, \Delta \rightarrow (\partial_z^2 - \alpha^2)$ позволяют исключить $\mathbf{u}, p$ из уравнений (17) и представить их в форме

$$L(\lambda - V \partial_z)w = \mu L^2 w + \alpha^2 \rho, \quad (19)$$

$$\lambda u^k + w \partial_z u_0^k = \varepsilon\mu^k L u^k, \quad (20)$$

$\rho = \beta^1 u^1 + \beta^2 u^2, L = (\partial_z^2 - \alpha^2)$, где с учетом (15)

$$\begin{aligned} \partial_z u_0^1 &= -\frac{s_1}{w}, \quad \partial_z u_0^2 = \frac{s_2}{w}, \\ W &= z_2 - z_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Обратим внимание, что в случае $V = 0$ система (19)–(21) совпадает с уравнениями так называемой двойной диффузии – тепловой конвекции в жидкости с примесью – и может быть легко решена [21].

Монотонная неустойчивость

При $\lambda = 0$ (случай монотонной потери устойчивости механического равновесия) величины u^k могут быть исключены из уравнений (19)–(21) и получено одно обыкновенное уравнение шестого порядка для функции w . Однако при этом краевые условия для w не будут поточно разделены, т.е. краевые условия будут заданы не только для функций, но и для их линейных комбинаций. Численная реализация решения задачи при этом будет гораздо сложнее. Значительно проще решать непосредственно систему (19)–(21) с краевыми условиями (18).

Для определения критических параметров в случае монотонной неустойчивости следует решать спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[0,1]$:

$$(D^2 - \alpha_0^2)^2 w = r \alpha_0^2 u - V_0 (D^2 - \alpha_0^2) Dw, \quad (22)$$

$$(D^2 - \alpha_0^2) u = w, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad (23)$$

$$w = Dw = u = 0, \quad x = 0, 1, \quad (24)$$

где

$$V_0 = \frac{vW}{\mu}, \quad r = \frac{(\beta^2 - \beta^1) j_0 W^3}{\varepsilon \mu V}. \quad (25)$$

Переход от уравнений (19)–(21) при $\lambda = 0$ к уравнениям (22)–(25) осуществлен при помощи замен $z = z_1 + Wx$, $\alpha_0 = \alpha W$, $u^1 = -\frac{j_0 u}{\varepsilon V W}$, $u^2 = \frac{j_0 u}{\varepsilon V W}$ с учетом соотношений (11), (21).

Числа подобия V_0 и r являются аналогами чисел Рейнольдса и Рэлея, которые для обычных задач конвекции записываются в виде $Re \sim \mu^{-1}$, $Ra \sim (\varepsilon \mu)^{-1}$. Переход от отрезка $[z_1, z_2]$ к стандартному $[0,1]$ возможен ввиду инвариантности уравнений относительно сдвига вдоль оси z . Интересно отметить, что в силу соотношений (11), (21) удастся заменить два уравнения (20) для определения u^1, u^2 на одно уравнение (23) для u (только при $\lambda = 0$).

Таким образом, в окончательном варианте спектральная задача в случае монотонной неустойчивости содержит всего три параметра (V_0 ,

r, α_0^2), что позволяет строить нейтральные кривые, например, вида $r^* = r^*(\alpha_0^2, V_0)$ при фиксированных значениях V_0 . Заметим, что при $\beta^1 = \beta^2$ величина $r = 0$ и конвективное перемешивание невозможно. Такой результат достаточно прозрачен с физической точки зрения – в случае одинаковых коэффициентов концентрационного сжатия в силу соотношения Кольрауша (11) отрицательный градиент концентрации u_0^1 «уничтожает» положительный градиент концентрации u_0^2 , обращая возмущения архимедовой силы плавающей ρ в нуль.

Результаты вычислений

Спектральная (22)–(24) задача решалась методом пристрелки. При фиксированных значениях $V_0 = k$, $k = 0, \dots, 10$ определялись нейтральные кривые – зависимости $r = r(\alpha_0; V_0)$ (рис. 2).

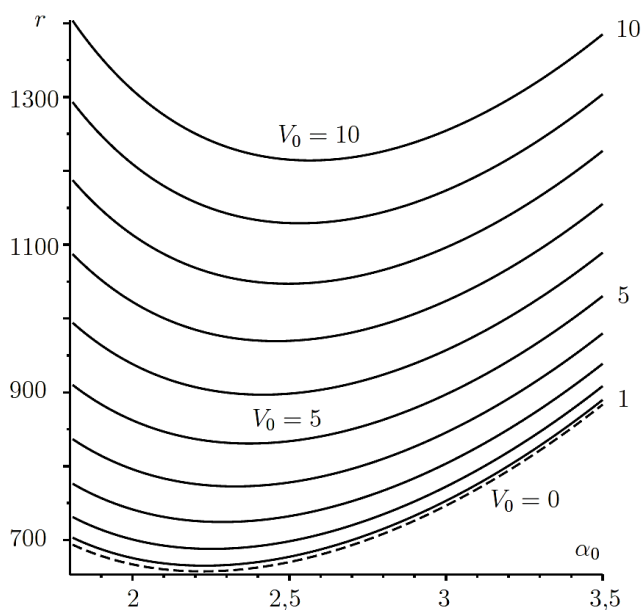


Рис. 2. Нейтральные кривые монотонной потери устойчивости $r = r(\alpha_0)$ / Fig. 2. Neutral curves of monotonic instability $r = r(\alpha_0)$

Нейтральная кривая при $V_0 = 0$ (пунктирная линия на рис. 2), естественно, совпадает с нейтральной кривой для задачи Рэлея – Бенара о тепловой конвекции в горизонтальном слое жидкости со свободными недеформируемыми границами [21, с. 31–39]. Заметим, что для задачи изопахорефа $V_0 > 0$, так как в противном случае

невозможно образование разделившихся зон. Нейтральная кривая при $V_0 = 0$ приведена для того, чтобы подчеркнуть формальный переход задачи (22)–(24) в задачу о тепловой конвекции.

Критические параметры r^* , α_0^* (таблица) возникновения конвекции разыскивались обычным образом при помощи соотношения

$$r^* = \min_{\alpha_0} r(\alpha_0; V_0) = r(\alpha_0^*; V_0).$$

Результаты вычислений показывают, что с ростом параметра V_0 критические числа r^* возможного возникновения конвекции увеличиваются. Иными словами, увеличение плотности электрического тока j_0 (см. (25) и (11)) стабилизирует механическое равновесие жидкости, предотвращая возможность конвективного перемешивания.

Зависимость критических параметров r^* , α_0^* от V_0
/ The dependence of the critical parameters r^* , α_0^* on V_0

V_0	r^*	α_0^*
0	657,511	2,221
1	665,256	2,230
2	687,996	2,252
3	724,396	2,287
4	772,626	2,327
5	830,725	2,372
6	896,855	2,416
7	969,433	2,459
8	1047,159	2,497
9	1128,998	2,533
10	1214,141	2,566

Конечно, при практическом использовании результатов расчетов следует учитывать, что величины r , V_0 представляют собой сложные комплексы, зависящие от большого количества параметров. Требуется дополнительный анализ взаимосвязей между различными характеристиками процесса (подвижность компонент μ^k , концентрация u_0^k и т. п.) для проведения процесса изотахофореза.

Заключение

Метод, использованный для построения модели (замена уравнений переноса на аналогичные, допускающие более простые решения, чем исходные уравнения), может быть применен для построения асимптотических моделей и в случае других задач электрофореза; в более об-

щем случае – для задач массопереноса внешними полями [22]. Подчеркнем, что следует изменять именно уравнения, а не решения, так как в противном случае исследование устойчивости будет производиться не на решении, отвечающем механическому равновесию, а на некотором, строго говоря, произвольном решении. Конечно, для развития метода желательно было бы получить его строгое математическое обоснование, позволяющее сравнить спектры линеаризованных задач для исходной и асимптотической моделей. В настоящее время такое сравнение имеется лишь для изученной модели. Полученные результаты расчетов достаточно хорошо совпадают с численными [12, с. 54–61]. Численное решение и сконструированная простая асимптотическая модель, на наш взгляд, имеют важное значение для совершенствования методов препаративного изотахофореза (выделение из смесей чистых веществ в больших количествах), а не только для аналитического изотахофореза (разделение смесей с целью идентификации ее компонент).

Литература

1. Константинов Б.П., Ошуркова О.В. Быстрый микроанализ химических элементов методом подвижной границы // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1110–1113.
2. Степанов А.В., Корчемная Е.К. Электромиграционный метод в неорганическом анализе. М.: Химия, 1979. 328 с.
3. Longsworth L.G. Moving Boundary Electrophoresis – Theory // Electrophoresis: theory, methods, and applications. M. Bier (ed.). N.Y.: Academic Press, 1959. P. 91–136.
4. Moore G.T. Theory of isotachopheresis. Development of concentration boundaries // J. Chromatogr. 1975. Vol. 106, № 1. P. 1–16.
5. Жуков М.Ю., Юдович В.И. Математическая модель изотахофореза // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 334–338.
6. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И. Математическая теория электрофореза: применение к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наукова думка, 1983. 241 с.
7. Жуков М.Ю. Методика расчета движения зон и времени полного разделения смеси при изотахофорезе // Молекуляр. биология. 1984. Вып. 36. С. 28–34.

8. Жуков М.Ю. Нестационарная модель изотахофореза // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 4. С. 549–565.

9. Жуков М.Ю. Уравнения переноса масс для сильно концентрированных многокомпонентных смесей при наличии электрического поля. Модель изотахофореза // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 4. С. 19–28.

10. Жуков М.Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 2005. 216 с.

11. Zhukov M.Yu., Ermakov S.V., Majorova O.A. Computer simulation of transient states in capillary zone electrophoresis and isotachopheresis // Electrophoresis. 1992. № 13. P. 838–848.

12. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А., Ширяева Е.В. Гидродинамика и поведение границ зон при изотахофорезе. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015. 94 с.

13. Mosher R.A., Saville D.A., Thorman W. The Dynamics of Electrophoresis. N.Y.: VCH Publishers, 1992. 236 p.

14. Жуков М.Ю., Петровская Н.В. Колебательная неустойчивость жидкости в почти нестратифицированной бесконечно-компонентной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 24–37.

15. Жуков М.Ю., Сазонов Л.И. Асимптотика собственных значений для краевой задачи с дельта-образными коэффициентами // Диф. уравнения. 1997. Т. 3, № 4. С. 470–477.

16. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Мышкис А.Д., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова думка, 1992. 590 с.

17. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Ветвление решений, расчет и асимптотика нейтральных кривых монотонной потери устойчивости в задаче о концентрационной конвекции в электрическом поле // Изв. РАН, МЖГ. 1994. № 5. С. 150–157.

18. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Расчет нейтральных кривых монотонной потери устойчивости для задачи конвекции в бесконечно-компонентной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 11–20.

19. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 3. 296 с.

20. Кузнецов Ю.А. Существование и устойчивость бегущих волн в системах «реакция – диффузия» с одной пространственной переменной. Препринт. Пуцино: Научный центр биологических исследований АН СССР, 1982. 40 с.

21. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

22. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Микрогидродинамика, жидкие плёнки и электрофорез. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015. 240 с.

References

1. Konstantinov B.P., Oshurkova O.V. Bystryi mikroanaliz khimicheskikh elementov metodom podvizhnoi granitsy [Rapid microanalysis of chemical elements by the method of moving boundaries]. Dokl. AN SSSR. 1963, vol. 148, No. 5, pp. 1110–1113.

2. Stepanov A.V., Korchemnaya E.K. Elektromigratsionnyi metod v neorganicheskom analize [Electromigration method in inorganic analysis]. Moscow: Khimiya, 1979, 328 p.

3. Longworth L.G. Moving Boundary Electrophoresis - Theory. Electrophoresis: theory, methods, and applications. M. Bier (Ed.). New York: Academic Press, 1959, pp. 91–136.

4. Moore G.T. Theory of isotachopheresis. Development of concentration boundaries. J. Chromatogr. 1975, vol. 106, No. 1, pp. 1–16.

5. Zhukov M.Yu., Yudovich V.I. Matematicheskaya model' izotakhoforeza [Mathematical model of isotachopheresis]. Dokl. AN SSSR. 1982, vol. 267, No. 2, pp. 334–338.

6. Babskii V.G., Zhukov M.Yu., Yudovich V.I. Matematicheskaya teoriya elektroforeza: primeneniye k metodam fraktsionirovaniya biopolimerov [Mathematical theory of electrophoresis: application to biopolymer fractionation methods]. Kiev: Naukova dumka, 1983, 241 p.

7. Zhukov M.Yu. Metodika rascheta dvizheniya zon i vremeni polnogo razdeleniya smesi pri izotakhoforeze [Method of calculating the movement of zones and the time of complete separation of the mixture at isotachopheresis]. Molekulyar. biologiya. 1984, iss. 36, pp. 28–34.

8. Zhukov M.Yu. Nestatsionarnaya model' izotakhoforeza [Unsteady model of isotachopheresis]. ZhVM i MF. 1984, vol. 24, No. 4, pp. 549–565.

9. Zhukov M.Yu. Uravneniya perenos mass dlya sil'no kontsentrirrovannykh mnogokomponentnykh smesei pri nalichii elektricheskogo polya. Model' izotakhoforeza [Mass transfer equations for highly concentrated multi-component mixtures in the presence of an electric field. Model of isotachopheresis]. Mat. modelirovanie. 1995, vol. 7, No. 4, pp. 19–28.

10. Zhukov M.Yu. Massoperenos elektricheskim polem [Mass transfer by an electric field]. Rostov-on-Don: Izd-vo RGU, 2005, 216 s.

11. Zhukov M.Yu., Ermakov S.V., Majorova O.A. Computer simulation of transient states in capillary zone electrophoresis and isotachopheresis. Electrophoresis. 1992, No. 13, pp. 838–848.

12. Zhukov M.Yu., Tsyvenkova O.A., Shiryayeva E.V. Gidrodinamika i povedeniye granits zon pri izotakhoforeze [Hydrodynamics and behavior of the boundaries of zones

when isotachophoresis]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2015, 94 p.

13. Mosher R.A., Saville D.A., Thorman W. *The Dynamics of Electrophoresis*. New York: VCH Publishers, 1992, 236 p.

14. Zhukov M.Yu., Petrovskaya N.V. Kolebatel'naya neustoiichivost' zhidkosti v pochni nestratifitsirovannoi beskonechno-komponentnoi smesi [Vibrational instability of a liquid in an almost unstratified infinite-component mixture]. *Izv. RAN. MZhG*. 1997, No. 5, pp. 24-37.

15. Zhukov M.Yu., Sazonov L.I. Asimptotika sobstvennykh znachenii dlya kraevoi zadachi s del'ta-obraznymi koeffitsientami [Asymptotics of eigenvalues for a boundary value problem with Delta-shaped coefficients]. *Dif. uravneniya*. 1997, vol. 3, No. 4, pp. 470-477.

16. Babitskii V.G., Zhukov M.Yu., Myshkis A.D., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya uslovii nevesomosti* [Methods for solving problems of hydromechanics for weightlessness conditions]. Kiev: Naukova dumka, 1992, 590 p.

17. Zhukov M.Yu., Tsyvenkova O.A. Vetvlenie reshenii, raschet i asimptotika neitral'nykh krivykh monotonnoi poteri ustoichivosti v zadache o kontsentratsionnoi konveksii v elektricheskom pole [Branching of solutions, calculation and asymptotics of neutral curves of monotone loss

of stability in the problem of concentration convection in an electric field]. *Izv. RAN, MZhG*. 1994, No. 5, pp. 150-157.

18. Zhukov M.Yu., Tsyvenkova O.A. Raschet neitral'nykh krivykh monotonnoi poteri ustoichivosti dlya zadachi konveksii v beskonechno-komponentnoi smesi [Calculation of neutral curves of monotone loss of stability for the problem of convection in an infinite-component mixture]. *Izv. RAN. MZhG*. 1995, No. 5, pp. 11-20.

19. Beitman G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions]. Moscow: Nauka, 1966, vol. 3, 296 p.

20. Kuznetsov Yu.A. *Sushchestvovanie i ustoichivost' begushchikh voln v sistemakh «reaktsiya – diffuziya» s odnoi prostranstvennoi peremennoi* [Existence and stability of traveling waves in reaction-diffusion systems with one spatial variable]. Preprint. Pushchino: Nauchnyi tsentr biologicheskikh issledovani AN SSSR, 1982, 40 p.

21. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Konvektivnaya ustoichivost' neszhimaemoi zhidkosti* [Convective stability of incompressible fluid]. Moscow: Nauka, 1972, 392 p.

22. Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. *Mikrogidrodinamika, zhidkie plenki i elektroforez* [Microhydrodynamics, liquid films and electrophoresis]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2015, 240 p.

УДК 539.3

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-36-41

НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ С УЧЁТОМ ТРЕНИЯ, ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ И ИЗНОСА*

© 2019 г. Е.М. Колосова¹, С.А. Данильченко¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

NON-STATIONARY CONTACT INTERACTION IN A SLIDING BEARING TAKING INTO ACCOUNT FRICTION, HEAT SEPARATION AND WEAR

E.M. Kolosova¹, S.A. Danilchenko¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Колосова Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, лаборатория механики деформируемых тел и конструкций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: a_lena_ch@mail.ru

Elena M. Kolosova - Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Laboratory for Mechanics of Deformable Bodies and Constructions, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: a_lena_ch@mail.ru

Данильченко Сергей Александрович – инженер-проектировщик, лаборатория механики деформируемых тел и конструкций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: sergey.a.danilchenko@gmail.com

Sergey A. Danilchenko - Design Engineer, Laboratory for Mechanics of Deformable Bodies and Constructions, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: sergey.a.danilchenko@gmail.com

Контактное взаимодействие в технических узлах различных машин и механизмов сложной формы всегда сопровождается нагревом конструкций, а также износом контактирующих поверхностей. Нагрев и влияние температуры на степень износа являются важными задачами машиностроения. В данной статье исследована задача в рамках линейной теории термоупругости о контактном взаимодействии в однослойном подшипнике скольжения в случае вращения вала с постоянной скоростью и постоянной вдавливающей силой. В зоне контакта происходит генерация тепла за счёт работы сил трения. Коэффициент трения взят в виде функции от температуры, полученной на основе экспериментальных данных. Величина износа контактной поверхности рассчитывалась на основе модели Аркарда. Проведены численные эксперименты при различных значениях входных параметров задачи. Вычислены температура, контактные напряжения и износ с учётом зависимости коэффициента трения от температуры.

Ключевые слова: термоупругость, тепловыделение от трения, контактное взаимодействие, подшипник скольжения, трение, износ.

The contact interaction in the technical units of various machines and mechanisms of complex shape is always followed by heating of structures, as well as wear of the contacting surfaces. The study of heating and the effect of temperature on the degree of wear are important mechanical engineering problems. In this article the problem was investigated in the framework of the linear theory of thermoelasticity about contact interaction in a single-layer sliding bearing in the case of shaft rotation with a constant speed and constant pressing force. The heat was generated due to the work of friction forces in the contact zone. The friction coefficient was taken as a function of temperature obtained on the basis of experimental data. In addition to heat generation in the contact zone, the process of material wear was simulated. The wear value of the contact surface was calculated based on the Archard model. The numerical experiments were carried out for various values of the input parameters of the problem. The temperature, contact stress and wear value were calculated taking into account the dependence of the friction coefficient on temperature.

* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 9.4726.2017/8.9).

Keywords: thermoelasticity, frictions heating, contact interaction, sliding bearing, friction, wear.

Введение

С использованием методологии, изложенной в статьях [1–3], в данной работе изучена задача о термоупругом контактном взаимодействии в однослойном подшипнике скольжения с учётом наличия трения и износа в зоне контакта. В отличие от работ [4, 5], в которых коэффициент трения постоянен, в данном исследовании коэффициент трения взят в виде функции от температуры, аппроксимирующей экспериментальные данные по измерению величины коэффициента трения при различных температурах в контактной области [6]. Моделированию износа в подшипниках скольжения посвящено много работ, например [7–9], в которых не учитывается температура. В данной статье величина износа контактной поверхности определена на основе модели Аркарда (моделируется процесс износа трущихся поверхностей) с учётом зависимости параметров модели от температуры, а также с возможностью изменения геометрии контактных поверхностей в соответствии с величиной износа. Проведены численные эксперименты при различных входных параметрах задачи.

Постановка исследуемой проблемы

Рассматривается в цилиндрической системе координат $O_2 r \varphi z$ вращение против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω упругого однородного цилиндра (далее – вала) внутри цилиндрического слоя конечной длины (далее – подшипника). Геометрия подшипника представляет собой в цилиндрической системе координат $O_1 r \varphi z$ цилиндрический слой: $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-l/2 \leq z \leq l/2$. Вал радиусом $R_0 = R_1 - \Delta$ ($\Delta \geq 0$ – малая величина) занимает область $-l/2 - d \leq z \leq l/2 + d$; ось вала в исходном состоянии параллельна оси подшипника и проходит через точку O_2 . Первоначальное касание подшипника и вала происходит по линии $r = R_1$, $\varphi = 0$, $-l/2 \leq z \leq l/2$.

На рис. 1 представлен трёхмерный исследуемый объект, на рис. 2 – схема постановки задачи в разрезе плоскостью $O_1 xy$.

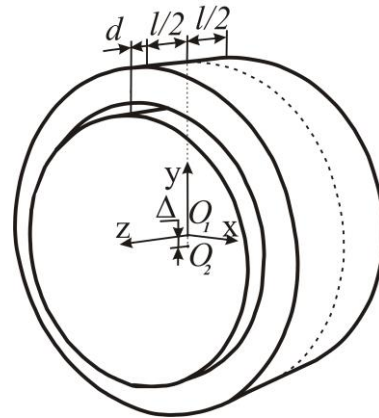


Рис. 1. Трёхмерный исследуемый объект
/ Fig. 1. Three-dimensional investigation object

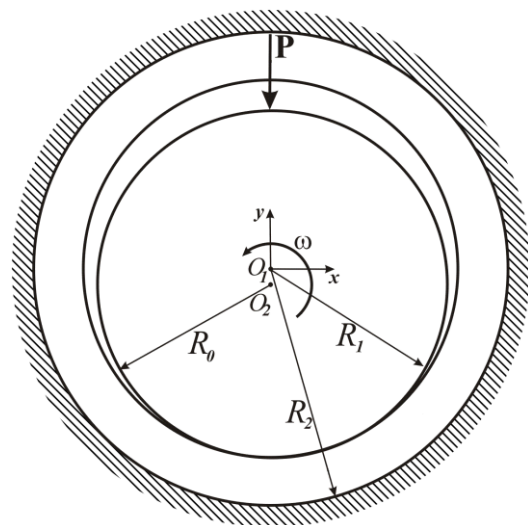


Рис. 2. Схема постановки задачи в разрезе плоскостью $O_1 xy$ / Fig. 2. The scheme of the problem statement in the cutting of the plane $O_1 xy$

Боковые поверхности подшипника $z = \pm l/2$, $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, свободны от напряжений; внешняя поверхность $r = R_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-l/2 \leq z \leq l/2$ жёстко закреплена. Поверхности торцов вала $0 \leq r \leq R_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z = \pm l/2$, а также выступающие из слоя цилиндрические поверхности вала $r = R_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$-l/2 - d \leq z \leq -l/2$ и $r = R_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,
 $l/2 \leq z \leq l/2 + d$ свободны от напряжений. На вал действует приложенная на торцах нагрузка, суммарно равная величине P и направленная вертикально вниз.

Предполагается, что на поверхностях вала и подшипника, граничащих с окружающей средой, заданы условия конвективного теплообмена с коэффициентом конвективной теплоотдачи a . Пусть в начальном состоянии температуры вала, подшипника и окружающей среды совпадают и равны 0°C . Между валом и подшипником действуют силы кулоновского трения с коэффициентом трения μ .

Исследование включает в себя решение двух задач: нестационарной термоупругой контактной задачи 1 о вращении упругого цилиндра в цилиндрическом слое и нестационарной упругой контактной задачи об износе трущихся поверхностей исследуемых тел с учетом полученных в задаче 1 полей температур (задача 2). В задаче 1 коэффициент трения μ задаётся в виде зависимости от температуры, полученной на основе экспериментальных данных [6]. В результате работы сил трения в зоне контакта вала и подшипника происходит выделение тепла. В задаче 2 коэффициент трения μ задаётся в виде зависимости от времени, полученной в результате решения задачи 1.

Для решения поставленных задач применяется метод конечного элемента с использованием специально разработанного программного кода на языке APDL для конечно-элементного пакета ANSYS. Решение каждой из задач осуществляется в два этапа. На первом рассматривается статическая контактная задача теории упругости о вдавливании вала во внутреннюю поверхность подшипника. На втором этапе для задачи 1 решается связанная нестационарная термоупругая контактная задача о вращении вала с учётом трения и тепловыделения, а для задачи 2 – связанная нестационарная упругая контактная задача о вращении вала с учётом трения и износа. Предполагается, что интенсивность изнашивания вала мала по сравнению с интенсивностью изнашивания подшипника, поэтому износ вала при проведении вычислений не учитывался с целью уменьшения времени расчётов. В задаче 1 конечно-элементная сетка строилась с помощью 20-узловых упругих элементов

SOLID226, для которых установлена опция термоупругого анализа. В задаче 2 использовались 20-узловые упругие элементы SOLID186. На рис. 3 представлена конечно-элементная модель исследуемого объекта.

Модель Аркарда представлена уравнением

$$w = \frac{K}{H} P^m v_{rel}^n, \quad (1)$$

где w – смещение точек контактной поверхности по направлению износа; K – коэффициент износа; H – твёрдость материала; P – контактное давление; v_{rel} – относительная скорость скольжения контактирующих поверхностей; m, n – параметры, характеризующие степенную зависимость величины износа от относительной скорости или контактного давления, $m = n = 1$.

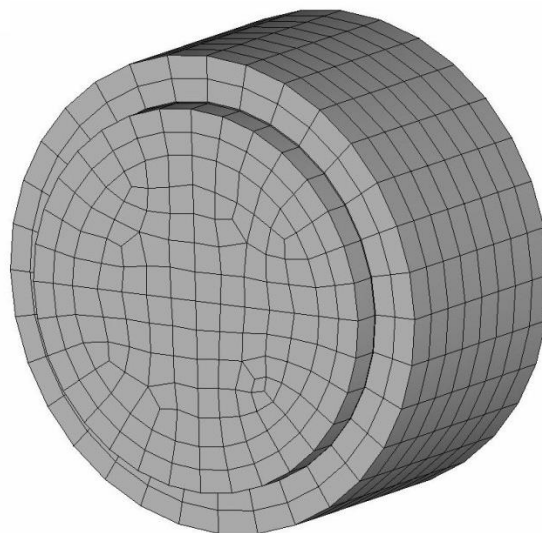


Рис. 3. Конечно-элементная модель исследуемого объекта
/ Fig. 3. The finite element model of the studied object

Результаты расчётов

Построенные твердотельные и конечно-элементные модели поставленных задач позволяют проводить вычислительные эксперименты при различных входных параметрах задач.

При выполнении расчётов подшипник предполагался выполненным из фторопласта, вал – из стали. В обеих задачах использовались одинаковые геометрические параметры, физико-механические и теплофизические свойства материалов (табл. 1, 2), скорости вращения вала, нагрузки, действующие на вал, коэффициенты конвективной теплоотдачи.

Геометрические параметры: внутренний и внешний радиусы подшипника $R_1 = 0,023$ м, $R_2 = 0,03$ м; зазор между валом и подшипником $\Delta = 9 \cdot 10^{-5}$ м; длина подшипника $l = 0,03$ м; выступ вала $d = 0,005$ м.

Угловая скорость вращения вала $\omega_z = 5$ об/с; действующая на вал сила $P = 30$ кН; время, в течение которого происходило вращение вала, $t = 1$ с. Коэффициент конвективной теплоотдачи пары металл – воздух на поверхностях вала и подшипника, граничащих с окружающей средой, $a = 50$ Вт/м².

Таблица 1

Исходные механические и теплофизические параметры
/ The initial mechanical and thermophysical parameters

Параметр	Фторопласт	Сталь
Плотность ρ , кг/м ³	2200	7800
Модуль Юнга E , Па	$4 \cdot 10^8$	$2,1 \cdot 10^{11}$
Коэффициент Пуассона ν	0,3	0,3
Теплопроводность Λ , Вт/(м·К)	0,25	50,2
Коэффициент теплового расширения α , К ⁻¹	См. табл. 2	$1,1 \cdot 10^{-5}$
Удельная теплоёмкость C , Дж/(кг·К)	1040	462

Таблица 2

Зависимость коэффициента теплового расширения фторопласта от времени / The dependence of the coefficient of ftoroplast thermal expansion on time

t , °С	-10	20	50	110
$\alpha_1(t) \cdot 10^4$, К ⁻¹	0,8	2,5	1,1	1,1

В табл. 3 приведены значения коэффициента трения для фторопласта в зависимости от температуры. Для задачи 1 $T = 0$ °С. После расчёта определялась зависимость температуры нагрева подшипника от времени. Эти результаты сопоставлялись с данными из табл. 3, после чего строилась зависимость коэффициента трения от времени, которая использовалась при расчётах в задаче 2.

Таблица 3

Зависимость коэффициента трения от температуры
/ The dependence of the coefficient of friction on temperature

T , °С	0	25	45	65	85
Коэффициент трения	0,04	0,04	0,041	0,041	0,042

Результаты расчётов температуры, износа и контактных давлений приведены в виде графиков. На рис. 4 представлен график изменения максимальной температуры нагрева подшипника во время вращения вала, полученный по результатам решения задачи 1. Это происходит в двух точках, которые лежат на линии первоначального касания подшипника с валом симметрично относительно плоскости O_1xy . Графики изменения величины износа и контактных давлений вдоль линий $r = R_1$, $-90 \leq \varphi \leq 90$, $z = \pm l$ на подшипнике в момент окончания вращения вала, полученные по результатам решения задачи 2, показаны на рис. 5, 6.

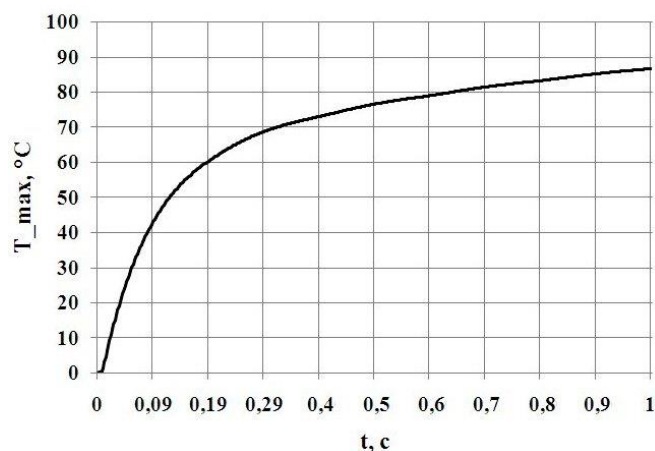


Рис. 4. Изменение максимальной температуры нагрева подшипника во время вращения вала / Fig. 4. Graph of the maximum bearing heating temperature during shaft rotation

Численные эксперименты показали, что на износ с учётом тепловыделения от трения оказывают существенное влияние такие факторы, как зависимость коэффициента трения от температуры в области контакта, входные геометрические параметры исследуемых задач, а также физико-механические и теплофизические свойства материалов.

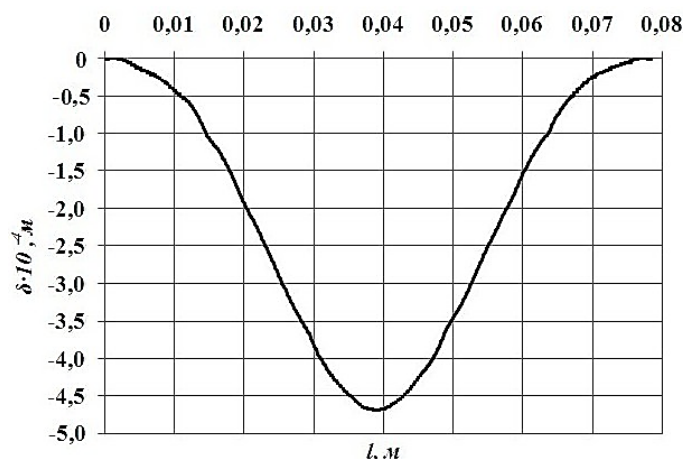


Рис. 5. Изменение величины износа вдоль линий $r=R_1$, $-90 \leq \varphi \leq 90$, $z = \pm l$ в момент окончания вращения вала
/ Fig. 5. Graph of wear value changes along the lines $r=R_1$, $-90 \leq \varphi \leq 90$, $z = \pm l$ at the end of shaft rotation

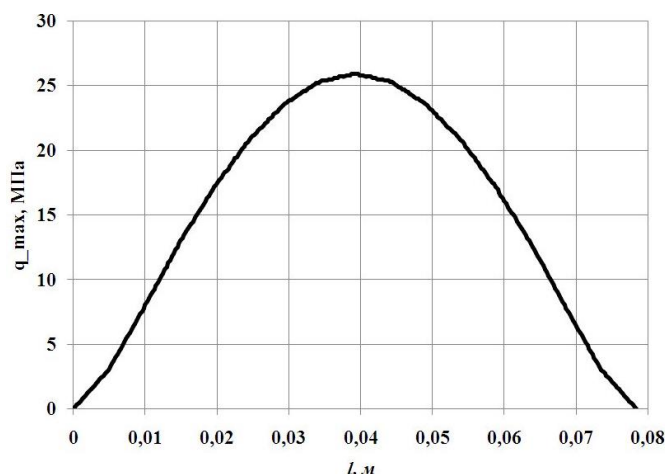


Рис. 6. Изменение контактных давлений вдоль линий $r=R_1$, $-90 \leq \varphi \leq 90$, $z = \pm l$ в момент окончания вращения вала
/ Fig. 6. Graph of contact pressure changes along the lines $r=R_1$, $-90 \leq \varphi \leq 90$, $z = \pm l$ at the end of shaft rotation

Литература

1. Чебаков М.И., Данильченко С.А., Ляпин А.А. Моделирование износа на контакте двух упругих тел с учетом тепловыделения от трения // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 4-1. С. 51–57.
2. Чебаков М.И., Данильченко С.А., Ляпин А.А. Контактная задача для упругого параллелепипеда при наличии трения и износа // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 2. С. 32–37.

3. Чебаков М.И., Данильченко С.А., Ляпин А.А. Моделирование контактного взаимодействия железнодорожного колеса и тормозной колодки с учетом износа, тепловыделения от трения и зависимости механических параметров от температуры // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2018. № 4. С. 49–53.
4. Колесников В.И., Колосова Е.М., Чебаков М.И. Моделирование нестационарного контактного взаимодействия в подшипнике скольжения с учетом тепловыделения от трения и конвективного теплообмена // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 2. С. 72–79.
5. Kolesnikov I.V., Danilchenko S.A., Kolosova E.M., Chebakov M.I., Lyapin A.A. Modelling of thermoelastic transient contact interaction for binary bearing taking into account convection // Transport Problems. 2016. Vol. 11, № 3. P. 73–81.
6. Френкель М.И. Поршневые компрессоры. Теория, конструкции и основы проектирования. Л.: Машиностроение, 1969. 744 с.
7. Rezaei A., Paapegem W.V., Baets P.D., Ost W., Degrieck J. Adaptive finite element simulation of wear evolution in radial sliding bearings // Wear. 2012. № 296. P. 660–671.
8. Stanković M., Marinković A., Grbović A., Mišković Ž., Rosić B., Mitrović R. Determination of Archard's wear coefficient and wear simulation of sliding bearings // Industrial Lubrication and Tribology. 2018. Vol. 71, iss. 1. P. 119–125.
9. Schmidt A.A., Schmidt T., Grabherr O., Bartel D. Transient wear simulation based on three-dimensional finite element analysis for a dry running tilted shaft-bushing bearing // Wear. 2018. № 408–409. P. 171–179.

References

1. Chebakov M.I., Danil'chenko S.A., Lyapin A.A. Modelirovanie iznosa na kontakte dvukh uprugikh tel s uchetom teplovydeleniya ot treniya [Modeling of wear on the contact of two elastic bodies taking into account heat release from friction]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2017, No. 4-1, pp. 51–57.
2. Chebakov M.I., Danil'chenko S.A., Lyapin A.A. Kontaktnaya zadacha dlya uprugogo parallelepipedu pri nalichii treniya i iznosa [Contact problem for elastic parallelepiped in the presence of friction and wear]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2017, No. 2, pp. 32–37.
3. Chebakov M.I., Danil'chenko S.A., Lyapin A.A. Modelirovanie kontaktnogo vzaimodeistviya zhelezno-dorozhnogo kolesa i tormoznoi kolodki s uchetom iznosa, teplovydeleniya ot treniya i zavisimosti mekhanicheskikh parametrov ot temperatury [Modeling of contact interacti-

on of a railway wheel and a brake pad taking into account wear, heat release from friction and dependence of mechanical parameters on temperature]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2018, No. 4, pp. 49-53.

4. Kolesnikov V.I., Kolosova E.M., Chebakov M.I. Modelirovanie nestatsionarnogo kontaktnogo vzaimodeistviya v podshipnike skol'zheniya s uchetom teplovydeleniya ot treniya i konvektivnogo teploobmena [Modeling of unsteady contact interaction in the sliding bearing taking into account heat release from friction and convective heat exchange]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2016, No. 2, pp. 72-29.

5. Kolesnikov I.V., Danilchenko S.A., Kolosova E.M., Chebakov M.I., Lyapin A.A. Modelling of thermoelastic transient contact interaction for binary bearing taking into account convection. *Transport Problems*. 2016, vol. 11, No. 3, pp. 73-81.

6. Frenkel' M.I. *Porshnevye kompressory. Teoriya, konstruksii i osnovy proektirovaniya* [Piston compressors. Theory, construction and design basics]. Leningrad: Mashinostroenie, 1969, 744 p.

7. Rezaei A., Paepegem W.V., Baets P.D., Ost W., Degrieck J. Adaptive finite element simulation of wear evolution in radial sliding bearings. *Wear*. 2012, No. 296, pp. 660-671.

8. Stanković M., Marinković A., Grbović A., Mišković Ž., Rosić B., Mitrović R. Determination of Archard's wear coefficient and wear simulation of sliding bearings. *Industrial Lubrication and Tribology*. 2018, vol. 71, iss. 1, pp. 119-125.

9. Schmidt A.A., Schmidt T., Grabherr O., Bartel D. Transient wear simulation based on three-dimensional finite element analysis for a dry running tilted shaft-bushing bearing. *Wear*. 2018, No. 408-409, pp. 171-179.

УДК 517.9

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-42-46

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ

© 2019 г. А.Л. Мирошников¹, Н.В. Миллер¹, И.А. Трефилова¹, С.В. Гейбука²

¹Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск, Россия,

²Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирск, Россия

ABOUT USING MULTIDIMENSIONAL INTEGRALS FOR EVALUATING THE CONCENTRATION FUNCTION

A.L. Miroshnikov¹, N.V. Miller¹, I.A. Trefilova¹, S.V. Geybuka²

¹Siberian Transport University, Novosibirsk, Russia,

²Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk, Russia

Мирошников Андрей Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Сибирский государственный университет путей сообщения, ул. Д. Ковальчук, 191, г. Новосибирск, 630049, Россия, e-mail: andmir@ngs.ru

Andrey L. Miroshnikov - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Siberian Transport University, D. Kovalchuk St., 191, Novosibirsk, 630049, Russia, e-mail: andmir@ngs.ru

Миллер Наталья Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, кафедра высшей математики, Сибирский государственный университет путей сообщения, ул. Д. Ковальчук, 191, г. Новосибирск, 630049, Россия, e-mail: minatav@mail.ru

Natalya V. Miller - Candidate of Pedagogics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Siberian Transport University, D. Kovalchuk St., 191, Novosibirsk, 630049, Russia, e-mail: minatav@mail.ru

Трефилова Ирина Александровна – кандидат экономических наук, доцент, кафедра высшей математики, Сибирский государственный университет путей сообщения, ул. Д. Ковальчук, 191, г. Новосибирск, 630049, Россия, e-mail: koja@mail.ru

Irina A. Trefilova - Candidate of Economics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Siberian Transport University, D. Kovalchuk St., 191, Novosibirsk, 630049, Russia, e-mail: koja@mail.ru

Гейбука Светлана Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент, кафедра алгебры и математического анализа, Новосибирский государственный педагогический университет, ул. Вилуйская, 28, г. Новосибирск, 630126, Россия, e-mail: geybukasv@mail.ru

Svetlana V. Geybuka - Candidate of Pedagogics, Associate Professor, Department of Algebra and Mathematical Analysis, Novosibirsk State Pedagogical University, Vilyuiskaya St., 28, Novosibirsk, 630126, Russia, e-mail: geybukasv@mail.ru

В различных теоретических исследованиях и практических приложениях естественно возникают суммы независимых случайных величин. Достаточно указать закон больших чисел, центральную предельную теорему и их многочисленные модификации. Поэтому понятен интерес к функции концентрации, которая является важным инструментом изучения свойств сверток распределений независимых случайных слагаемых.

В одномерном случае эта функция исследована достаточно глубоко, и для нее известны различные неутрачиваемые оценки. В дальнейшем в работах Энгера была получена одна из первых оценок сверху функции концентрации Леви для многомерного куба. При этом оказалось, что результат существенно зависит от размерности пространства.

Цель данной работы – вывод аналогичных неравенств для многомерной функции концентрации Леви с абсолютными постоянными. Эти оценки в пространстве произвольной размерности выводятся для некоторого специального класса множеств.

Предварительно устанавливаются необходимые нетривиальные оценки различных сложных интегралов по определенным вероятностным мерам. Следствием этих результатов является получение неутрачиваемых оценок функции концентрации Леви в пространствах больших размерностей для некоторого класса множеств. Так, показано, что установленные неравенства дают локальную оценку функции концентрации для многомерного куба с абсолютной постоянной.

Ключевые слова: оценки функции концентрации, многомерные пространства, интегрирование в многомерных пространствах, интегральные неравенства.

In various theoretical studies and practical applications, sums of independent random variables naturally arise. It is enough to point out the law of large numbers, the central limit theorem and their numerous modifications. Therefore, interest in the concentration function, which is an important tool for studying the properties of convolutions of distributions of independent random terms, is understandable.

In the one-dimensional case, this function is investigated sufficiently deeply, and various non-improved estimates are obtained for it. Later in Enger's work, one of the first top estimates of the Levy concentration function for a multidimensional cube was obtained. At the same time, it turned out that the obtained result significantly depends on the dimension of space.

The aim of this paper is to obtain analogous inequalities for the multivariate Levy concentration function with absolute constants. These estimates in a space of arbitrary dimension are derived for some special class of sets.

To obtain the desired result, the necessary nontrivial estimates of various complex integrals for certain probabilistic measures are preliminarily established. A consequence of these results is to obtain non-improved estimates of the Levy concentration function in spaces of large dimensions for a certain class of sets. Thus, it is shown that the inequalities give a local estimate of the concentration function for a multidimensional cube with an absolute constant.

Keywords: concentration function estimates, multidimensional spaces, integration in multidimensional spaces, integral inequalities.

Введение

При построении моделей многих реальных процессов и явлений естественно возникают суммы независимых случайных слагаемых. В качестве примеров можно указать закон больших чисел и различные варианты центральной предельной теоремы. При этом получение необходимых оценок для нормированных сумм независимых случайных величин опирается на целый ряд нетривиальных интегральных неравенств.

В 30-е гг. XX в. [1, р. 36] была введена функция концентрации, которая позволила получить важные соотношения для свертки распределений независимых случайных величин. Дальнейшие свойства этой функции были исследованы в работах [2–8].

Изучение этого вопроса было продолжено в [9–12]. Важно отметить, что неулучшаемые оценки функции концентрации суммы независимых случайных величин найдены только для одномерного случая.

Цель данной работы – получение аналогичных оценок в многомерном пространстве для определенного класса множеств.

Формулировка основных результатов

Пусть G – произвольное выпуклое множество в R^d ($d > 1$); ξ – случайный вектор в этом же пространстве. Функция концентрации Леви $Q(\xi, G)$ определяется соотношением $Q(\xi, G) = \sup_{a \in R^d} P(\xi \in a + G)$, где $P(A)$ – вероятность события A .

Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in R^d$ обозначим, как обычно, $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$. Тогда $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Ниже функция концентрации $Q(\xi, G)$ рассматривается для специального множества $G \subset R^d$. Положим

$$E = \{x \in R^d: \max_{1 \leq i \leq d} |(x, e_i)| \leq 1\}, \quad (1)$$

где векторы $e_1, e_2, \dots, e_d$ составляют ортонормированный базис в R^d , т.е. i -я координата вектора e_i равна единице, а все остальные – нулю.

Очевидно, что так определенное множество E будет выпуклым и симметричным. Ниже $p_E(x) = \max_{1 \leq i \leq d} |(x, e_i)|$ – выпуклый функционал Минковского для куба E . Тогда множество E из равенства (1) можно записать в виде $E = \{x \in R^d: p_E(x) \leq 1\}$.

Для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных векторов в R^d обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Кроме того, для положительных λ_k пусть $\lambda \geq \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$ и $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Симметризованный случайный вектор $\tilde{\xi}$ определяется равенством $\tilde{\xi} = \xi' - \xi''$, где ξ' и ξ'' – независимые случайные векторы, распределенные одинаково с ξ . В этом случае через $P(\cdot)$ и $\tilde{P}(\cdot)$ будем обозначать распределения случайных векторов ξ и $\tilde{\xi}$ соответственно.

В работе [2, р. 17] установлена следующая оценка функции концентрации Леви для d -мерного куба:

$$Q(S_n, \lambda E) \leq C d \cdot \lambda \left(\sum_{k=1}^n M(p_E(\tilde{\xi}_k) \wedge \lambda_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где $M\xi$ – математическое ожидание случайной величины ξ ; C – абсолютная постоянная.

Соотношение (2) показывает, что оценка сверху для функции $Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E})$ существенно зависит от размерности пространства d .

Цель работы состоит в получении аналогичных неравенств, не содержащих d . В дальнейшем, если не оговорено противоположное, $\mathbf{a} \in R^d$ – произвольный неслучайный вектор; $P_n^{(a)}(\cdot)$ – распределение $\mathbf{S}_n - \mathbf{a}$; $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq d} Q((\xi_1, \mathbf{e}_k), \lambda_0), \lambda_0 > 0$. Одной буквой C обозначаются различные абсолютные константы. Поэтому справедливы равенства $C + C = C, C \cdot C = C$ и им подобные.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Тогда

$$\int_{\lambda \mathbf{E}} P_n^{(a)}(dx) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \quad (3)$$

Следствие 1. При наложенных в теореме 1 ограничениях справедливо неравенство

$$Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Теорема 2. Если $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, то

$$Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \frac{\lambda}{\lambda_0} Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \quad (4)$$

Следствие 2. Пусть $\lambda = \lambda_0, \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}). \quad (5)$$

Важно отметить, что при наложенных ограничениях из соотношения (2) следует лишь оценка $Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) \leq C \frac{d}{\sqrt{n}}$. Действительно, в этом случае

$$\sum_{k=1}^n M(p_E(\xi_k) \wedge \lambda_k)^2 \geq n \frac{\lambda^2}{4} (1 - Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E})) \geq n \frac{\lambda^2}{4} (1 - \varepsilon).$$

Условие $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ означает малость $Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}_1)$. Таким образом, неравенство (4) дает локальную оценку многомерной функции концентрации.

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\xi_k^{i_0} - i_0$ – компонента ξ_k , для которой $\varepsilon = Q(\xi_k^{i_0}, \lambda_0 \mathbf{E})$. Рассмотрим компоненты случайных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^{i_0}, \dots, \xi_1^d),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\xi_n = (\xi_n^1, \dots, \xi_n^{i_0}, \dots, \xi_n^d).$$

$$\text{Тогда } \mathbf{S}_n = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^1, \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k^{i_0}, \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k^d \right),$$

где в силу независимости $\xi_1, \dots, \xi_n$, $\sum_{k=1}^n \xi_k^{i_0}$ – сумма независимых одинаково распределенных случайных величин.

Возьмем произвольный вектор

$$\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^{i_0}, \dots, a^d) \in R^d. \quad \text{Имеем}$$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_n - \mathbf{a} \in \lambda \mathbf{E}) &= P\left(\max_{1 \leq i \leq d} |(\mathbf{S}_n - \mathbf{a}, \mathbf{e}_i)| \leq \lambda\right) = \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^d \left\{ \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^i - a^i \right| \leq \lambda \right\}\right) \leq P\left(\left| \sum_{k=1}^n \xi_k^{i_0} - a^{i_0} \right| \leq \lambda\right) \leq Q\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{i_0}, 2\lambda \mathbf{E}_1\right). \end{aligned}$$

Используя известные оценки функции концентрации в одномерном случае [5, 9], получаем

$$Q\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{i_0}, 2\lambda \mathbf{E}_1\right) \leq C\lambda \cdot \frac{1}{\lambda_0 \sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Отсюда в силу произвольности $\mathbf{a}$ следует утверждение теоремы 1.

Доказательство следствия 1. В силу неравенства (3) и определения многомерной функции концентрации

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) &= \sup_{\mathbf{a} \in R^d} P(\mathbf{S}_n \in \mathbf{a} + \lambda \mathbf{E}) = \\ &= \sup_{\mathbf{a} \in R^d} \int_{\lambda \mathbf{E}} P_n^{(a)}(dx) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.

Если $n = 1$, то неравенство (4) очевидно. При $Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}_1) > \frac{1}{2}$ его справедливость следует из теоремы 1. Поэтому в дальнейшем считаем, что $n \geq 2$ и $Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{1}{2}$.

Положим $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq d} Q((\xi_1, \mathbf{e}_i), \lambda_0 \mathbf{E}_1) = Q((\xi_1, \mathbf{e}_{i_0}), \lambda_0 \mathbf{E}_1)$ и рассмотрим два случая.

1. Пусть $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$. Тогда существует такое

$$b_0 \in R^1, \text{ что } P\left(\xi_1^{i_0} \in b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Обозначим $D = \{\xi_1^{i_0} \in b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\}$. Тогда, если $\bar{D}$ – дополнение к событию D , то $P(\bar{D}) \leq \frac{1}{2}$. Для произвольного $\mathbf{a} \in R^d$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_n \in \mathbf{a} + \lambda \mathbf{E}) &= \\ &= \int_{R^d} P(\xi_1 \in \mathbf{a} - \mathbf{x} + \lambda \mathbf{E}) P(\mathbf{S}_{n-1} \in d\mathbf{x}) \leq J_1 + J_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{R^d} P\left(\bigcap_{i=1}^d \{\xi_1^i \in a^i - x^i + 2\lambda \mathbf{E}_1\} \cap D\right) P(\mathbf{S}_{n-1} \in d\mathbf{x}), \\ J_2 &= \frac{1}{2} \int_{R^d} P(\{\xi_1 \in \mathbf{a} - \mathbf{x} + \lambda \mathbf{E}\} / \bar{D}) P(\mathbf{S}_{n-1} \in d\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7)$$

Верхний индекс i означает i -ю компоненту рассматриваемого вектора.

$$\text{Очевидно, что } J_2 \leq \frac{1}{2} Q(\mathbf{S}_{n-1}, \lambda \mathbf{E}).$$

Оценим интеграл J_1 , определенный равенством (6). Заметим, что если

$$x^{i_0} \notin \{a^{i_0} + 2\lambda \mathbf{E}_1\} - \{b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^d \{\xi_1^i \in a^i - x^i + 2\lambda \mathbf{E}_1\} \cap \{\xi_1^{i_0} \in b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\}) &\leq \\ &\leq P(\{\xi_1^{i_0} \in a^{i_0} - x^{i_0} + 2\lambda \mathbf{E}_1\} \cap \{\xi_1^{i_0} \in b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\}) = \\ &= P(\xi_1^{i_0} \in \{a^{i_0} - x^{i_0} + 2\lambda \mathbf{E}_1\} \cap \{b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\}) = 0, \end{aligned}$$

где $\gamma \in A - B$ означает, что

$$\gamma = \alpha - \beta: \alpha \in A, \beta \in B.$$

Заметим, что

$$P(\{\xi_1 \in \mathbf{a} - \mathbf{x} + \lambda \mathbf{E}\} \cap D) \leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}_1).$$

Следовательно,

$$J_1 \leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}_1) \cdot \int_L P(\mathbf{S}_{n-1} \in d\mathbf{x}), \text{ где}$$

$$L: x^{i_0} \in \{a^{i_0} + 2\lambda \mathbf{E}_1\} - \{b_0 + \lambda_0 \mathbf{E}_1\},$$

$$-\infty < x^i < +\infty, \quad i = 1, \dots, d; \quad i \neq i_0.$$

$$\text{Так как } 2\lambda \mathbf{E}_1 - \lambda_0 \mathbf{E}_1 \subset (2\lambda + \lambda_0) \mathbf{E}_1 \subset 3\lambda \mathbf{E}_1,$$

то из последнего соотношения получаем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot Q\left(\sum_{k=2}^n \xi_k^{i_0}, 3\lambda \mathbf{E}_1\right) \leq \\ &\leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\mathbf{a} \in R^d$ будет справедливо неравенство

$$Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E})}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{1}{2} Q(\mathbf{S}_{n-1}, \lambda \mathbf{E}). \quad (8)$$

2. Пусть $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Убедимся, что и в этом случае неравенство (8) будет иметь место. Действительно, из условия $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ следует, что существует такое $m \geq 2$, что $Q(\xi_1^{i_0}, m\lambda_0 \mathbf{E}_1) \geq \frac{1}{2}$, но $Q(\xi_1^{i_0}, (m-1)\lambda_0 \mathbf{E}_1) \leq \frac{1}{2}$.

Обозначим $D = \{\xi_1^{i_0} \in b_0 + m\lambda_0 \mathbf{E}_1\}$, где $b_0 \in R^1$ – некоторое число. Если $\bar{D}$ – дополнение к D , то $P(\bar{D}) \leq \frac{1}{2}$.

Аналогично предыдущему случаю оценим $P(\mathbf{S}_n \in \mathbf{a} + \lambda \mathbf{E})$.

Имеем $P(\mathbf{S}_n \in \mathbf{a} + \lambda \mathbf{E}) \leq J_1 + J_2$, где J_1 и J_2 определены равенствами (6) и (7).

Как и ранее, получаем

$$J_2 \leq \frac{1}{2} Q(\mathbf{S}_{n-1}, \lambda \mathbf{E}). \quad (9)$$

Оценим J_1 . Заметим, что

$$\begin{aligned} P\left(\cap_{i=1}^d \{\xi_1^i \in a^i - x^i + 2\lambda \mathbf{E}_1\} \cap \{\xi_1^{i_0} \in b_0 + \right. \\ \left. + m\lambda_0 \mathbf{E}_1\}\right) = 0, \text{ если} \\ x^{i_0} \notin \{a^{i_0} + 2\lambda \mathbf{E}_1\} - \{b_0 + m\lambda_0 \mathbf{E}_1\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_1 \leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot Q\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{i_0}, (2+m)\lambda \mathbf{E}_1\right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\lambda(2+m)}{\lambda_0(m-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-Q(\xi_1^{i_0}, (m-1)\lambda_0 \mathbf{E}_1)}} \leq \\ &\leq Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом неравенства (9) мы вновь получаем соотношение (8). Отсюда

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) &\leq \frac{C}{\sqrt{1-\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{2^k \sqrt{n-k}} + \\ &+ \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} Q\left(\mathbf{S}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \lambda \mathbf{E}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ – целая часть $\frac{n}{2}$.

Из (10) следует неравенство

$$Q(\mathbf{S}_n, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{C}{\sqrt{1-\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}},$$

$$Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}) \leq \frac{C}{\sqrt{1-\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} Q(\xi_1, \lambda \mathbf{E}).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 2.

При наложенных ограничениях $\frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} < C$. Поэтому оценка (5) сразу следует из неравенства (4).

Выводы

Интегральные неравенства, являющиеся утверждениями доказанных теорем, а также следствий из них, представляют собой неулучшаемые оценки функции концентрации в многомерном случае. На функцию концентрации суммы независимых случайных векторов для определенного класса множеств удалось распространить результаты, полученные ранее в одномерном случае.

Литература

1. Levy P. Theorie de l'addition des variables aleatoires. Paris: Gauthier-Villar, 1937. 228 p.
2. Enger J. Bounds for the concentration function of a sum of independent random vectors with values in a Euclidean or Hilbert space. Uppsala: Thesis Uppsala University. 1975. 68 p.
3. Зигель Г. Верхние оценки для функции концентрации в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применение. 1981. Т. 26. С. 335–346.
4. Гётце Ф., Зайцев А.Ю. Оценки точности сильной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 796–808.
5. Мирошников А.Л., Rogozin Б.А. Неравенства для функции концентрации // Теория вероятностей и ее применение. 1980. Т. 25, вып. 1. С. 178–183.

6. Ананевский С.М., Мирошников А.Л. Локальные оценки функции концентрации Леви в многомерном гильбертовом пространстве // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 130. С. 611.

7. Мирошников А.Л. Локальная оценка многомерной функции концентрации Леви для куба // IV Междунар. Вильнюсская конф. по теории вероятностей и мат. статистике : тез. докл. Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. Вильнюс, 1985. Т. II. С. 192.

8. Tao T., Van V. From the Littlewood-Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices // Bull. Am. Math. Soc. 2009. Vol. 46 (3). P. 377–396.

9. Хенгартер В., Теодореску Р. Функции концентрации. М.: Наука, 1980. 176 с.

10. Елисеева Ю.С., Зайцев А.Ю. Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Теория вероятностей и ее применение. 2012. Т. 57. С. 768–777.

11. Елисеева Ю.С. Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 2013. Т. 412, № 19. С. 127–137.

12. Vershynin R. Invertibility of symmetric random matrices // Random Structures and Algorithms. 2014. Vol. 44. P. 135–182.

References

1. Levy P. *Theorie de l'addition des variables aleatoires*. Paris: Gauthier-Villar, 1937, 228 p.

2. Enger J. *Bounds for the concentration function of a sum of independent random vectors with values in a Euclidean or Hilbert space*. Uppsala: Thesis Uppsala University, 1975, 68 p.

3. Zigel' G. Verkhnie otsenki dlya funktsii kontsentratsii v gil'bertovom prostranstve [Upper bounds for the concentration function in Hilbert space]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniye*. 1981, vol. 26, pp. 335-346.

4. Getse F., Zaitsev A.Yu. Otsenki tochnosti sil'noi approksimatsii v gil'bertovom prostranstve [Estimates of

the accuracy of a strong approximation in Hilbert space]. *Sib. mat. zhurn*. 2011, vol. 52, No. 4, pp. 796-808.

5. Miroshnikov A.L., Rogozin B.A. Neravenstva dlya funktsii kontsentratsii [Inequalities for the concentration function]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniye*. 1980, vol. 25, iss. 1, pp. 178-183.

6. Ananevskii S.M., Miroshnikov A.L. Lokal'nye otsenki funktsii kontsentratsii Levi v mnogomernom gil'bertovom prostranstve [The local assessment function of the Levi concentration in a multidimensional Hilbert space]. *Zap. nauch. seminarov LOMI*. 1983, vol. 130, p. 611.

7. Miroshnikov A.L. [Local evaluation of a multidimensional function of the Levi concentration for the cube]. *IV Mezhdunar. Vil'nyusskaya konf. po teorii veroyatnostei i mat. statistike* [IV international Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics]. Abstracts. Institute of Mathematics and Cybernetics, USSR Academy of Sciences. Vilnius, 1985, vol. II, p. 192.

8. Tao T., Van V. From the Littlewood-Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices. *Bull. Am. Math. Soc*. 2009, vol. 46 (3), pp. 377-396.

9. Khengarter V., Teodoresku R. *Funktsii kontsentratsii* [A function of concentration]. Moscow: Nauka, 1980, 176 p.

10. Eliseeva Yu.S., Zaitsev A.Yu. Otsenki funktsii kontsentratsii vzveshennykh summ nezavisimykh odinakovo raspredelennykh sluchainykh velichin [Assessment of the concentration function in sums of independent identically distributed random variables]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniye*. 2012, vol. 57, pp. 768-777.

11. Eliseeva Yu.S. Mnogomernye otsenki funktsii kontsentratsii vzveshennykh summ nezavisimykh odinakovo raspredelennykh sluchainykh velichin [Multidimensional assessment of the concentration function in sums of independent identically distributed random variables]. *Zap. nauch. seminarov LOMI*. 2013, vol. 412, No. 19, pp. 127-137.

12. Vershynin R. Invertibility of symmetric random matrices. *Random Structures and Algorithms*. 2014, vol. 44, pp. 135-182.

УДК 517.392

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-47-51

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА

© 2019 г. Ш.С. Хубежты^{1,2}

¹Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия,

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия

AN APPROXIMATE SOLUTION OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS USING CHEBYSHEV SERIES

Sh.S. Khubezhty^{1,2}

¹Khetagurov North Ossetian State University, Vladikavkaz, Russia,

²Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

Хубежты Шалва Соломонович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, ул. Ватутина, 46, г. Владикавказ, РСО-Алания, 362025, Россия; ведущий научный сотрудник, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, РСО-Алания, 362027, Россия, e-mail: shalva57@rambler.ru

Shalva S. Khubezhty - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Khetagurov North Ossetian State University, Vatutina St., 46, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, 362025, Russia; Leading Researcher, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Marcusa St., 22, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, 362027, Russia, e-mail: shalva57@rambler.ru

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений в различных областях математики и с тем обстоятельством, что аналитические решения таких уравнений возможны лишь в исключительных случаях.

Предложен и обоснован метод разложения функций в ряды Чебышева решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода, неограниченного на концах интервала интегрирования $[-1; 1]$.

Коэффициенты разложения неизвестной функции в ряд Чебышева находятся с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Для обоснования вычислительной схемы используются методы функционального анализа и теории ортогональных многочленов. Вводится пространство Гельдеровых функций с соответствующими нормами. В этом пространстве рассматриваются заданные сингулярные и соответствующие приближенные операторы. Приводятся условия существования обратного сингулярного оператора и доказывается существование обратного приближенного оператора. При выполнении условия существования у заданных функций производных до некоторого порядка, принадлежащих классу Гельдера, оценивается погрешность вычисления и дается порядок ее стремления к нулю.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегралы, ряды Чебышева, формулы обращения, обоснование метода.

Approximate methods for solving hypersingular integral equations are an actively developing area of computational mathematics. This is due to the numerous applications of hypersingular integral equations in various fields of mathematics and the fact that analytical solutions to such equations are possible only in exceptional cases.

In this paper, we propose and substantiate a method for expanding functions in Chebyshev series for solving hypersingular integral equations of the first kind, unbounded at the ends of the integration interval $[-1; 1]$.

The expansion coefficients of an unknown function in a Chebyshev series are found by solving systems of linear algebraic equations. To substantiate the computational scheme, methods of functional analysis and the theory of orthogonal polynomials are used. The space of Holder functions with the corresponding norms is introduced. In this space, given singular and corresponding approximate operators are considered. Conditions for the existence of an inverse singular operator are given and the existence of an inverse approximate operator is proved. When the conditions for the existence of given functions are satisfied, derivatives up to a certain order belonging to the Hölder class estimate the calculation error and give the order of its tendency to zero.

Keywords: hypersingular integrals, Chebyshev series, inversion formulas, method justification.

Введение

Применение метода граничных интегральных уравнений к задачам механики разрушения, механики композитных материалов, аэродинамики, электродинамики [1, 2] приводит к гиперсингулярным интегральным уравнениям первого рода:
$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \psi(t) dt = f(x), \quad (1)$$
 где $k(x,t)$ и $f(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции; $\psi(t)$ – неизвестная функция.

Интеграл $H(\psi, x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt$ понимается в смысле Адамара, т.е. справедливо

$$\int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2\psi(x)}{\varepsilon} \right).$$

В работах [1, 2] рассмотрено применение проекционных методов к приближенному решению уравнений вида (1) в предположении: а) $\psi(\pm 1) = 0$; б) $\psi(\pm 1) = \infty$; в) $\psi(1) = \infty$; $\psi(-1) = 0$ или $\psi(-1) = \infty$, $\psi(1) = 0$; даны их обоснования в весовых пространствах. Значения неизвестных функций $\psi(t)$ получаются в дискретных точках.

В данной работе предложена вычислительная схема приближенного решения уравнения (1) с применением рядов Чебышева. Решение ищется в виде $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая до 2-го порядка функция, второй производной которой удовлетворяет условие Гёльдера $H(\alpha)$ ($\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$), т.е. $\varphi(t) \in H_2(\alpha)$. Решение $\varphi(t)$ получается в виде ряда, т.е. для любой точки отрезка $[-1, 1]$.

Вычислительная схема

Как уже отметили, решение уравнения (1) будем искать в виде $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t)$, т.е. уравнение (1) принимает вид

$$K\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x,t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (2)$$

Многочлены Чебышева 1-го рода $T_n(t) = \cos n \arccos t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) являются ортогональными многочленами с весом $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$. Выполняются формулы

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Разложим функции $\varphi(t)$, $k(x,t)$ и $f(x)$ в ряды Чебышева 1-го рода [3].

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t), \\ k(x,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{il} T_i(x) T_l(t), \\ f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i T_i(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) – неизвестные, так как $\varphi(t)$ – функция неизвестная. Остальные коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} c_{il} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x,t) T_i(t) dt \right) T_l(x) dx, \\ d_i &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_i(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (3) в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(t-x)^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t) dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{il} T_i(x) T_l(t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i T_i(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая формулу [4]

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_k(t)}{(t-x)^2} dt = 2 \frac{x U_{k-1}(x) - k T_k(x)}{1-x^2},$$

где $U_{k-1}(x) = \frac{\sin k \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ – многочлен Чебышева второго рода, равномерную сходимость рядов Чебышева [3] и ортонормированность многочленов $T_n(t)$ из (5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} T_i(x) &= \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i T_i(x). \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Здесь } Q_k(x) = 2 \frac{x U_{k-1}(x) - k T_k(x)}{1-x^2}.$$

Разложим функцию $Q_k(x)$ также в ряд Чебышева.

$$Q_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ik} T_i(x), \quad (7)$$

$$\text{где } b_{ik} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} Q_k(t) T_i(t) dt.$$

Отметим, что функции $Q_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются многочленами степени $k-2$. Тогда

$$b_{ik} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, i = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & k = 2, 3, \dots, i \geq k-1. \end{cases}$$

С учетом этого равенства (6) принимает вид
$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{ik} \right) T_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{ik} \right) T_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i T_i(x).$$

Отсюда следует равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Следовательно, получили систему, эквивалентную уравнению (2).

Равенства (8) являются системой линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка. Для получения приближенного решения рассмотрим систему

$$\sum_{k=0}^n a_k (b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (9)$$

Коэффициенты b_{ik} , c_{ik} , d_i ($i, k = 0, 1, 2, \dots$) можно вычислить с наивысшей точностью по формуле Гаусса [5].

Как известно, уравнение (2) не имеет единственного решения. Доказано [6], что оно имеет единственное решение при дополнительных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_0(t) \varphi(t) dt &= C_0, \\ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_1(t) \varphi(t) dt &= C_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где C_0 , C_1 – некоторые произвольные постоянные, от которых зависит решение.

Подставляя $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t)$ в (10), с учетом ортогональности получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_0(t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t) dt &= C_0 \Rightarrow a_0 = C_0, \\ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_1(t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t) dt &= C_1 \Rightarrow a_1 = C_1. \end{aligned}$$

Таким образом, в системе (9) a_0 и a_1 считаются известными значениями.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n a_k (b_{ik} + c_{ik}) &= \\ = d_i - a_0 (b_{i0} + c_{i0}) - a_1 (b_{i1} - c_{i1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Решая систему (11), получим приближенное решение уравнения (2) в виде

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(t). \quad (12)$$

Обоснование метода

Вводятся пространства X и Y ; X – это пространство функций вида $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции до второго порядка, вторые производные которых удовлетворяют условию Гельдера $H(\alpha)$ ($\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$), т.е. $\varphi(t) \in H_2(\alpha)$; Y – пространство функций $y(t) \in H(\alpha)$. Нетрудно видеть, что оператор K действует из пространства X в пространство $Y = H(\alpha)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t) - \varphi(x) - \frac{1}{1!} \varphi'(x)(t-x) - \frac{1}{2!} \varphi''(\xi)(t-x)^2}{(t-x)^2} dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(x) + \varphi'(x)(t-x) + \frac{1}{2!} \varphi''(\xi)(t-x)^2}{(t-x)^2} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi'(x + \theta(t-x))(t-x) - \varphi'(x)(t-x) - \frac{1}{2!} \varphi''(\xi)(t-x)^2}{(t-x)^2} dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{\varphi(x)}{(t-x)^2} + \frac{\varphi'(x)}{t-x} + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) \right) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi''(\eta)(t-x)^2 - \frac{1}{2!} \varphi''(\xi)(t-x)^2}{(t-x)^2} dt + \varphi''(\xi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\varphi''(\eta) - \frac{1}{2} \varphi''(\xi) \right) dt + \varphi''(\xi) = \\ &= 2\varphi''(\bar{\eta}) \in H(\alpha) \subset Y. \end{aligned}$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{\varphi(x)}{(t-x)^2} + \frac{\varphi'(x)}{t-x} + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) \right) dt = \varphi''(\xi).$$

Также очевидно, что

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x, t) \varphi(t) dt \in H(\alpha) \in Y.$$

В пространство X вводится норма [7]

$$\begin{aligned} \|\psi\| &= \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| + \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi'(t)| + \\ &+ \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi''(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi''(t_1) - \varphi''(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \\ 0 &< \beta < \alpha. \end{aligned}$$

Через X_n обозначим подпространство пространства X , состоящее из функций $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$ – множество полиномов до n -го порядка. Норма в пространстве X_n определяется так же, как в пространстве X .

В пространствах Y норма вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \max_{-1 \leq t \leq 1} |y(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \\ 0 &< \beta < \alpha. \end{aligned}$$

Пространство Y_n – это множество функций $y(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$, норма такая же, как в пространстве Y .

Через P_n обозначим проектор, действующий из пространства Y в пространство Y_n по формуле $y_n(t) = P_n[y(t)]$, а из пространства X в X_n – по формуле $P_n[\psi_n] = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P_n[\varphi(t)]$. Следовательно, $P_n[y(t)]$ – оператор проектирования на множество интерполяционных многочленов степени n по узлам многочлена Чебышева 1-го рода. Известно [8], что $\|P_n\| \leq C \ln n$, где $C = \text{const}$.

Будем считать, что существует линейный обратный оператор K^{-1} , действующий из Y в X .

Приближенное решение ищем в виде функции $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k(t)$.

Коэффициенты α_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) определяются из системы линейных алгебраических уравнений (9) (или (11)), которая в операторной форме имеет вид

$$\begin{aligned} K_n \varphi_n(t) &= P_n \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x, t) \varphi_n(t) dt \right] = P_n[f(x)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как интеграл $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt$ является многочленом порядка $\leq n-2$, то

$$P_n \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt \right] = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt.$$

Воспользовавшись этим тождеством и свойством квадратурных формул Гаусса, уравнение (13) представим в виде

$$\bar{K}_n \varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt + P_n \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P_n^t[k(x, t)] \varphi_n(t) dt \right] = P_n[f(x)].$$

Оценим норму разности $K_n \varphi_n(t) - \bar{K}_n \varphi_n(t)$.

Имеем

$$\begin{aligned} & \|K_n \varphi_n(t) - \bar{K}_n \varphi_n(t)\|_{C[-1,1]} = \\ & = \left\| P_n \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} [k(x, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - k_n^x(x, t)] \varphi_n(t) dt \right] \right\|_{C[-1,1]} \leq \max |k(x, t) - \\ & - P_n^x[k(x, t)]| \left\| \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_n(t) dt \right\| \leq \\ & \leq \max |k(x, t) - P_n^x[k(x, t)]| \|\varphi_n(t)\|_{C[-1,1]} \leq \\ & \leq C E_n^x(k(x, t))(1 + \lambda_n) \|\varphi_n(t)\|, \end{aligned}$$

где $E_n^x(k(x, t))$ – наилучшее равномерное приближение функции $k(x, t)$ при фиксированном t по переменной x полиномами степени n ; λ_n – константа Лебега.

Так как $K_n \varphi_n(t) - \bar{K}_n \varphi_n(t)$ является многочленом $(n-2)$ -го порядка, то из обратной теоремы Бернштейна [9] следует, что

$$\begin{aligned} & \|K_n \varphi_n(t) - \bar{K}_n \varphi_n(t)\| \leq \\ & \leq C \bar{E}_n^x(k(x, t))(1 + \lambda_n) n^\beta \|\varphi_n(t)\|, \end{aligned}$$

где $\bar{E}_n^x(k(x, t)) = \sup_{-1 \leq t \leq 1} E_n^x(k(x, t))$.

Из теоремы Банаха [10] следует, что при n , для которых $q = C \|K^{-1}\| \bar{E}_n^x(k(x, t))(1 + \lambda_n) < 1$, оператор $\bar{K}_n$ непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\|\varphi_n - \bar{\varphi}_n\| \leq C n^\beta \|K^{-1}\| \bar{E}_n^x(k(x, t)) \lambda_n, \text{ где } \varphi_n - \text{решение уравнения (13).}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|\varphi - \bar{\varphi}_n\| \leq C \|K^{-1}\| \bar{E}_n^t(k(x, t)) \lambda_n.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть оператор K непрерывно обратим, функции $k(x, t), f(x) \in A_r(\alpha)$ ($r > 1$) (т.е. имеют непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка, а производная порядка r удовлетворяет

условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$)). Тогда при n таком, что

$C \|K^{-1}\| n^\beta (E_n^t(k(x, t)) + \bar{E}_n^x(k(x, t))) \ln n < 1$, система (11) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\varphi - \varphi_n\| \leq C \|K^{-1}\| n^\beta \left(\bar{E}_n^t(k(x, t)) + \right. \\ & \left. + \bar{E}_n^x(k(x, t)) \right) \ln n, \end{aligned}$$

или $\|\varphi - \varphi_n\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right)$, где φ и φ_n – решения соответственно уравнений (2) и (13).

Литература

1. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
2. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
3. Паиковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
4. Плиева Л.И. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 413–422.
5. Хубежты Ш.С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. 236 с.
6. Бойков И.В., Бойкова А.И. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании : материалы XIII Междунар. конф. Саранск, 12–16 июля 2017 г. Саранск, 2017. С. 446–461.
7. Бойков И.В., Бойкова А.И., Сёмов М.А. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Приволжский регион. Физ.-мат. науки. Математика. 2015. № 3 (35). С. 11–27.
8. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
9. Натансон И.Н. Конструктивная теория функций. М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. 688 с.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.

References

1. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyy eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow: Yanus, 1995, 520 p.

2. Vainikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskii L.N. *Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications]. Moscow: Yanus-K, 2001, 508 p.
3. Pashkovskii S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computation applications of polynomials and Chebyshev series]. Moscow: Nauka, 1983, 384 p.
4. Plieva L.I. *Kvadrurnye formuly interpolatsionnogo tipa dlya gipersingulyarnykh integralov na otrezke integrirovaniya* [Quadrature formulas of interpolation type for hypersingular integrals on the integration interval]. *Sib. zhurn. vychisl. matematiki*. 2016, vol. 19, No. 4, pp. 413-422.
5. Khubezhty Sh.S. *Kvadrurnye formuly dlya singulyarnykh integralov i nekotorye ikh primeneniya* [Quadrature formulas for singular integrals and some of their applications]. Vladikavkaz: YUMI VNTS RAN i RSO-A, 2011, 236 p.
6. Boikov I.V., Boikova A.I. [An approximate solution of hypersingular integral equations of the first kind with singularities of the second order]. *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii* [Differential equations and their applications in mathematical modeling]. Proceedings of the XIII International Conference. Saransk, July 12-16, 2017. Saransk, 2017, pp. 446-461.
7. Boikov I.V., Boikova A.I., Semov M.A. *Priblizhennoe reshenie gipersingulyarnykh integral'nykh uravnenii pervogo roda* [An approximate solution of hypersingular integral equations of the first kind]. *Izv. vuzov. Privolzhskii region. Fiz.-mat. nauki. Matematika*. 2015, No. 3 (35), pp. 11-27.
8. Sege G. *Ortogonal'nye mnogochleny* [Orthogonal polynomials]. Moscow: GIFML, 1962, 500 p.
9. Natanson I.N. *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive theory of functions]. Moscow; Leningrad: GIFML, 1949, 688 p.
10. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1984, 750 p.

НАУКИ О ЗЕМЛЕ SCIENCES OF EARTH

УДК 556.16

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-52-61

МАКСИМАЛЬНЫЙ И МИНИМАЛЬНЫЙ СТОК НА РЕКАХ СОЧИНСКОГО ПРИЧЕРНОМОРЬЯ

© 2019 г. Н.А. Битюков¹, Ю.Ю. Ткаченко², В.И. Денисов³

¹Сочинский национальный парк, Сочи, Россия,

²Территориальный центр мониторинга и прогнозирования ЧС природного и техногенного характера, Краснодар, Россия,

³Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

MAXIMAL AND MINIMAL RIVER FLOW OF THE SOCHI BLACK SEA COAST

N.A. Bityukov¹, Yu.Yu. Tkachenko², V.I. Denisov³

¹Sochi National Park, Sochi, Russia,

²Territorial Center of Monitoring and Forecasting Emergencies of Natural and Anthropogenic Origin, Krasnodar, Russia,

³Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Битюков Николай Александрович – доктор биологических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Сочинский национальный парк, Курортный пр., 74, г. Сочи, 354002, Россия, e-mail: nikbit@mail.ru

Nikolay A. Bityukov - Doctor of Biological Sciences, Professor, Leading Researcher, Sochi National Park, Kurortnyi Ave., 74, Sochi, 354002, Russia, e-mail: nikbit@mail.ru

Ткаченко Юрий Юрьевич – кандидат географических наук, руководитель Территориального центра мониторинга и прогнозирования ЧС природного и техногенного характера, ул. Раипиловская, 179/1, г. Краснодар, 350020, Россия, e-mail: yuyut23@mail.ru

Yuri Yu. Tkachenko - Candidate of Geography, Head of the Territorial Center of Monitoring and Forecasting Emergencies of Natural and Anthropogenic Origin, Rashpilevskaya St., 179/1, Krasnodar, 350020, Russia, e-mail: yuyut23@mail.ru

Денисов Валерий Иванович – кандидат географических наук, доцент, кафедра социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: denisovgeo@yandex.ru

Valeriy I. Denisov - Candidate of Geography, Associate Professor, Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: denisovgeo@yandex.ru

Излагаются результаты исследований максимального и минимального стока рек и особенностей речных бассейнов различного ранга территории Сочинского Причерноморья. Дан анализ генезиса паводков, начиная от склоновой формы стока и заканчивая многолетним режимом максимальных расходов воды на основных реках региона. Выполнены оценки повторяемости (обеспеченности в многолетнем ряду) максимальных паводков на реках. Анализ географических факторов формирования максимального и минимального стока рек позволил получить уточненную оценку пространственного распределения этих характеристик на территории Сочинского Причерноморья. Формирование катастрофических (максимальных) речных паводков начинается на уровне элементарных водосборов, где коэффициент максимального стока определяется состоянием поверхности водосбора. Возрастающие макси-

мальные стоки зависят от увеличивающейся водности атмосферы (климатический фактор) и засоренности и застроенности русла рек (антропогенный фактор). Минимальный сток представляет собой глубоководное грунтовое питание, которое определяется как климатическими и геолого-геоморфологическими характеристиками речного бассейна, так и условиями подстилающей поверхности на водосборе. В связи с этим изменение растительности на водосборе и хозяйственные мероприятия неизбежно влекут за собой изменение величины базисного стока и его доли в общем годовом стоке реки.

Ключевые слова: Сочинское Причерноморье, речная сеть, паводки, максимальный сток, минимальный сток, катастрофические наводнения.

The article presents the research results of maximal and minimal river flow and distinctive features of river drainage of diverse range of the Sochi Black Sea coast. The origin of river floods has been analysed starting from the shape of overland flows and up to long-term mode of maximal water consumption at main rivers of the area. The evaluation of the repetition (representation in a long-term record) of maximal river floods has been done. The analysis of geographical factors shaping maximal and minimal river drainage allowed to get specified estimation of spacial distribution of these features on the territory of the Sochi Black Sea coast. The formation of catastrophic (maximum) river floods begins at the level of elementary catchments, where the maximum runoff coefficient is determined by the state of the catchment surface. Increasing maximum flows depend on the increasing water content of the atmosphere (climatic factor) and clogging and built-up river beds (anthropogenic factor). The minimum flow is a deep-water groundwater supply, which is determined by both climatic and geological and geomorphological characteristics of the river basin, and the conditions of the underlying surface in the catchment. In this regard, changes in vegetation in the catchment and economic activities inevitably entail a change in the value of the base flow and its share in the total annual flow of the river.

Keywords: The Sochi Black Sea coast, river network, river flood, maximal river drainage, minimal river drainage, catastrophic flooding.

Введение

На Черноморском побережье Кавказа (ЧПК) прибрежная часть представляет собой узкую полосу предгорий шириной до 6–10 км с высотой до 400 м. Наиболее распространены здесь низкие горы, холмистые и увалистые возвышенности с относительно мягкими и сглаженными формами рельефа.

Район ЧПК является частью Северо-Западного Кавказа и включает территорию Сочинского национального парка, а также сопредельную часть муниципального образования Сочи и Кавказского государственного заповедника. Поскольку речная сеть здесь формируется как единое целое и является результатом взаимодействия сложных физико-географических процессов (климатические, гидрологические, геоморфологические и др.), целесообразно общую территорию обозначить как Сочинское Причерноморье. Особенностью в гидрологическом отношении является то, что район представляет собой комплекс замкнутых речных бассейнов с геоморфологически очерченным контуром, внутри которого происходит весь процесс круговорота влаги. Осадки, выпадающие в бассейнах рек в виде дождя и снега, частично уходят на испарение и транспирацию, но большей частью возвращаются поверхностным и подземным стоком в море [1].

Для этой части характерным является длительное хозяйственное воздействие, состоящее в вырубках и раскорчевках лесов с целью использования освобождаемых от леса территорий под застройки, сады, плантации и т.д., что негативно сказывается на гидрологическом режиме.

Согласно проведенным исследованиям МГУ [2, 3], на Черноморском побережье отмечаются преимущественно три типа наводнений, которые доминируют на реках: стоковые наводнения, при которых максимальные уровни воды $H_{\max}$ превышают критические $H_{\text{кр}}$ и $Q_{\max} > Q_{\text{кр}}$; далее идут по повторяемости наводнения смешанного типа – стокового и одновременно ливневого генезиса; третий тип – наводнения вследствие морского нагона.

При этом паводковым затоплениям подвержена пойменная часть речных долин региона. Масштаб ливневых наводнений возрастает при плохом функционировании ливневой канализации, поэтому обычно они встречаются именно в населенных пунктах Сочинского Причерноморья, их повторяемость увеличивается с ростом площади урбанизированных территорий [2, 3].

Материалы и методы

В работе приведены результаты обработки данных 67 автоматических гидрологических комплексов (АГК) региональной автоматизированной системы оперативного контроля и мониторинга на

территории Краснодарского края, расположенных на реках Черноморского побережья на участке Джубга – Адлер, и экспедиционных исследований в Черкесском округе Колхидской провинции, приморском и среднегорном лесорастительных районах (преобладание дубово-грабовых, каштановых и буково-грабовых лесов), где на участках ставились опыты с искусственным дождеванием элементарных водосборов (до 300 м²), а также выполнялась инфильтрационная съемка склонов при помощи простейших кольцевых инфильтрометров площадью 0,1 м² [4, 5]. Всего было проведено 16 опытов с искусственным дождеванием и 95 опытов с инфильтрометрами.

Обсуждение

Максимальный сток на основных реках Сочинского Причерноморья. Характеристика максимального стока важна на уровне как склонового стока, так и руслового стока рек. Первая фаза образования склонового стока тесно связана с плоскостной эрозией почвы на горных склонах, где основную защитную роль выполняет растительность, а также водно-физические свойства почв. В этом случае необходимо анализировать влияние хозяйственной деятельности на водосборах.

Сведения о максимальных расходах воды на реках региона приведены в гидрологических ежегодниках за каждый год [6–9]. На основании этих данных был выполнен анализ некоторых гидрометрических постов на реках Сочинского Причерноморья (р. Мзымта и Шахе). В табл. 1 приведены статистические характеристики максимального годового стока по этим рекам.

Наиболее длительный ряд наблюдений имеет гидрометрический пост на р. Сочи у с. Пластунка – более 80 лет. На хронологическом графике максимумов стока этой реки отчетливо прослеживается положительный тренд максимальных расходов воды: в среднем отмечается увеличение расходов за период наблюдений на 54 % (рисунок).

Аналогичная картина прослеживается и на других реках Сочинского Причерноморья, имеющих меньший период наблюдений за стоком, – р. Хоста у пос. Хоста, р. Шахе у с. Солох-Аул, р. Куапсе. Следовательно, можно считать, что увеличение максимальных годовых расходов воды прослеживается для всех рек региона. При этом малые реки побережья отличаются более интенсивным ростом максимумов стока, например, р. Куапсе – 55 % за 34 года наблюдений.

Повышение максимальных годовых расходов воды на реках Сочинского Причерноморья связано с ростом числа случаев катастрофических паводков, особенно в последние годы. Увеличение повторяемости паводков происходит с нарастанием количества выпадающих на побережье осадков, в первую очередь залповых, «взрывных», с интенсивностью более 50 мм/ч. Анализ осадков за весь ряд наблюдений выявил, что их среднее количество на территории края за каждые 10 лет увеличивается в среднем от 7 до 60 мм. Наибольшая тенденция роста отмечена на морских станциях: Сочи, Адлер, Туапсе, Анапа, Джубга, Тамань, Ейск (от 30 до 60 мм/10 лет). Если в 70-е гг. XX в. в среднем отмечалось 7 случаев выпадения очень сильных дождей в год, то в первом десятилетии XXI в. в среднем уже наблюдалось 11 случаев выпадения осадков категории опасного явления. При этом отмечается рост количества случаев выпадения экстремальных осадков. Если в 90-е гг. дожди с интенсивностью 50 мм/ч (100 мм/сут и более), которые формируют быстроразвивающиеся паводки, в среднем выпадали два раза в год, то начиная с 2000-х гг. наметилась тенденция роста их количества. Последние шесть лет наблюдается постоянное увеличение повторяемости выпадения очень сильных осадков. В 2016 г. было отмечено 16 случаев выпадения локальных сильных дождей, приводящих к развитию паводков на реках края [10].

Дополнительным фактором, способствующим росту паводков на реках, является усиливающаяся антропогенная нагрузка на водосборах горных рек региона в последние годы.

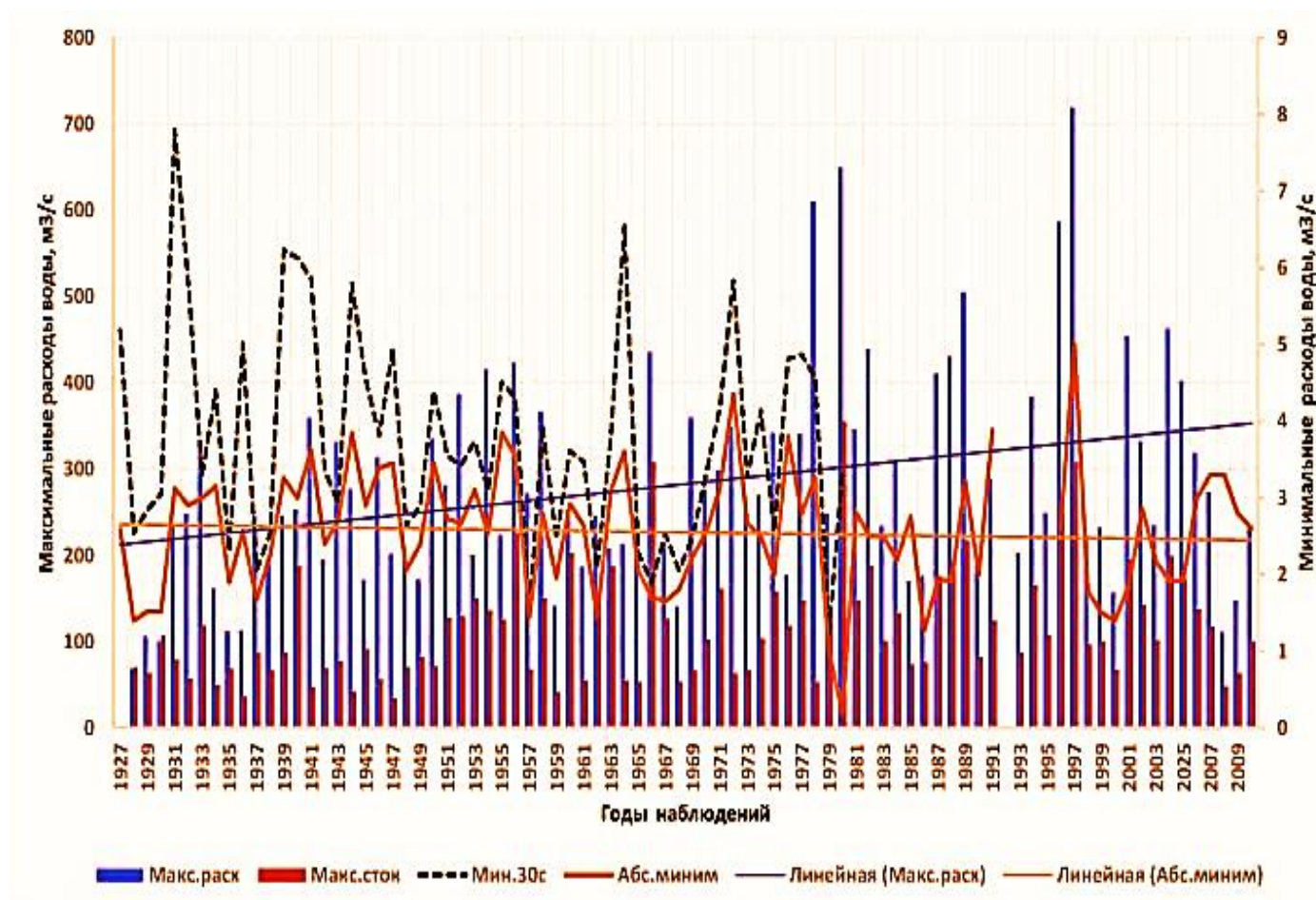
На наш взгляд, формирование катастрофических речных паводков начинается на уровне элементарных водосборов, где коэффициент максимального стока определяется состоянием поверхности водосбора. По наблюдениям в дубравной зоне, здесь коэффициенты паводочного стока очень велики (могут приближаться к 1), имеются реальные условия катастрофических явлений. Так, на примере одного из катастрофических паводков в бассейне р. Туапсе показаны расчеты максимальных расходов воды, достигших 1624 м³/с, что превышает средний многолетний расход воды (12,7 м³/с) в 128 раз (табл. 2).

В качестве примера ниже приведены расчеты заполнения русел рек в бассейнах р. Туапсе и близлежащих рек при прохождении катастрофического паводка в октябре 2010 г. (табл. 2).

Таблица 1

Статистические характеристики максимальных расходов воды за гидрологические годы на реках
Сочинского Причерноморья / Statistical characteristics of the maximum water consumption
for hydrological years on the rivers of the Sochi Black Sea coast

Норма максим. расходов, м³/с	Модульные коэффициенты максимумов, обеспеченных на Р, %							Коэффициент	
	3,0	5,0	10,0	50,0	90,0	95,5	97,0	вариации C _v , %	асимметрии C _s , %
р. Мзымта – пос. Красная Поляна (F= 510 км²)									
175	1,8	1,7	1,6	0,9	0,7	0,6	0,6	32,7	36,7
р. Мзымта – пос. Кепша (F= 798 км²)									
272	2,4	1,9	1,5	0,9	0,6	0,5	0,5	45,6	74,2
р. Шахе – с. Солох-Аул F= (423 км²)									
268	1,7	1,6	1,3	0,9	0,6	0,6	0,6	44,6	177,3



Хронологический график максимальных и минимальных расходов воды, а также максимальных слоев стока
за паводок на р. Сочи у с. Пластунка / Chronological chart of maximum and minimum water consumption,
as well as maximum runoff layers for the flood on the Sochi river near the village of Plastunka

Таблица 2

Гидравлические расчеты наполнения русел рек Черноморского побережья во время катастрофического паводка 15–16 октября 2010 г. (по данным Территориального центра мониторинга и прогнозирования ЧС природного и техногенного характера) / Hydraulic calculations of filling of riverbeds of the Black Sea coast during a catastrophic flood on October 15-16, 2010 (according to the state control of Territorial Center of Monitoring and Forecasting Emergencies of Natural and Anthropogenic Origin)

Н, м	Элементы реки	W, м ²	χ, м	R, м	I	1/n	C	v, м/с	Q, м ³ /с
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Туапсе – п. Кирпичный (створ I–I)</i>									
7,0	Русло	196,5	35	5,61	0,004	25	33,34	4,99	982
3,0	Пр. пойма	172,5	65	2,65	0,002	12,5	14,71	1,07	185
3,0	Лев. пойма	200,0	100	2,00	0,002	12,5	14,03	0,89	178
									Σ=1344
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Туапсе – з/п Туапсе (старый пост) (створ II–II)</i>									
8,5	Русло	292,5	58	5,04	0,005	25	32,75	5,20	1521
2,5	Пр. пойма	36,8	21	1,75	0,003	12,5	13,72	0,99	36,5
2,5	Лев. пойма	20,5	14	1,46	0,003	12,5	13,32	0,88	18,1
									Σ=1575
<i>Гидравлический расчет расхода р. Туапсе – з/п Туапсе (новый пост – гидроствор) (створ III–III)</i>									
7,5	Русло	285,3	74	3,85	0,0073	25	31,31	5,25	1498
1,5	Лев. пойма	118,0	60	1,97	0,003	12,5	14,00	1,08	127
									Σ=1625
<i>Гидравлический расчет расхода р. Туапсе – г. Туапсе (мост Сочинский) (створ IV–IV)</i>									
5,6	Русло	442	125	3,54	0,004	25	30,88	3,67	1624
									Σ=1624
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Спорная – с. Кривенковское (створ V–V)</i>									
3,0	Русло	46,3	15	3,1	0,004	20	24,15	2,68	124
0,5	Пр. пойма	50,0	50	1,0	0,002	12,5	12,50	0,56	28,0
0,5	Лев. пойма	10,0	10	1,0	0,002	12,5	12,50	0,56	5,59
									Σ=158
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Пиенахо – с. Анастасиевка (мост на окраине с. Георгиевское) (створ VI–VI)</i>									
4,5	Русло	158,9	40	3,97	0,004	20	25,18	3,17	504
4,0	Пр. пойма	160,0	80	2,00	0,001	12,5	14,03	0,63	100
4,0	Лев. пойма	160,0	80	2,00	0,001	12,5	14,03	0,63	100
									Σ=704
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Пиенахо – с. Георгиевское (в 1 км выше слияния с р. Туапсе) (створ VII–VII)</i>									
4,5	Русло	203,7	50	4,07	0,004	20	25,28	3,23	657
2,5	Пр. пойма	510,0	200	2,55	0,001	12,5	14,62	0,74	367
									Σ=1034
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Мал. Псеуихо – с. Георгиевское (створ VIII–VIII)</i>									
2,8	Русло	85,6	30	2,85	0,004	20	23,82	2,54	218
1,5	Пр. пойма	60,0	80	0,75	0,002	12,5	11,91	0,46	27,7
1,8	Лев. пойма	95,0	90	1,06	0,002	12,5	12,62	0,58	55,2
									Σ=301
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Цыпка – с. Цыпка (створ IX–IX)</i>									
2,3	Русло	97,3	55	1,77	0,004	20	22,00	1,85	180
0,5	Пр. пойма	30,0	50	0,60	0,002	12,5	11,48	0,40	11,9
0,7	Лев. пойма	35,0	30	1,17	0,002	12,5	12,83	0,62	21,7
									Σ=214
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Макопсе – с. Макопсе (створ X–X)</i>									
3,0	Русло	108,3	60	1,81	0,004	20	22,08	1,88	203
1,0	Пр. пойма	50,0	50	1,00	0,002	12,5	12,50	0,56	28,0
									Σ=231

Окончание табл. 2

Н, м	Элементы реки	W, м ²	χ, м	R, м	I	1/n	C	v, м/с	Q, м ³ /с
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Шепси – с. Шепси (створ XI–XI)</i>									
4,0	Русло	127,5	60	2,13	0,004	20	22,69	2,09	267
1,0	Пр. пойма	60,0	60	1,00	0,002	12,5	12,50	0,56	33,5
1,0	Лев. пойма	80,0	80	1,00	0,002	12,5	12,50	0,56	44,7
									Σ=345
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Псебе – с. Новомихайловское (створ XII–XII)</i>									
4,5	Русло	116,4	35	3,33	0,004	20	24,45	2,82	328
1,0	Пр. пойма	25,0	25	1,00	0,002	12,5	12,50	0,56	14,0
									Σ=342
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Нечепсухо – с. Новомихайловское (створ XIII–XIII)</i>									
4,0	Русло	175,0	50	3,5	0,004	20	24,65	2,92	510
1,0	Пр. пойма	400,0	500	0,8	0,002	12,5	12,04	0,48	193
0,5	Лев. пойма	30,0	30	1,0	0,002	12,5	12,50	0,56	16,8
									Σ=720
<i>Гидравлический расчет наполнения р. Джубга – с. Джубга (створ XIV–XIV)</i>									
4,0	Русло	101,0	25	4,04	0,004	20	25,25	3,21	324
2,8	Пр. пойма	84,0	40	2,10	0,002	12,5	14,15	0,92	77,0
2,5	Лев. пойма	45,8	45	1,02	0,002	12,5	12,54	0,57	25,9
									Σ=427

Примечание. Н – высота уровня воды; W – площадь поперечного сечения; χ – ширина русла в поперечном сечении; R – гидравлический радиус; I – продольный уклон реки, доля от единицы; 1/n – показатель шероховатости русла; C – скоростной коэффициент в формуле Шези; v – средняя скорость потока; Q – расход воды в поперечном сечении.

По расчетам, в этот же паводок (табл. 2) максимальный расход воды достигал на р. Макопсе – 231 м³/с, на р. Шепси – 345, на р. Псебе – 342, на р. Нечепсухо – 720 м³/с. Последний раз такие высокие расходы и уровни на реках Туапсинского и Лазаревского районов наблюдались в 1991 г.

Результаты расчета паводочных модулей стока катастрофических паводков 15–16.10.2010 и 01.08.1991 в бассейне р. Туапсе показали, что значения удельного стока, наблюдаемые в процессе формирования этих паводков, достигают здесь экстремально больших значений, ранее не наблюдаемых.

В результате выпадения сильных ливневых осадков здесь могут развиваться дождевые паводки чрезвычайной, катастрофической силы. С площади водосборного бассейна всего 352 км² могут формироваться расходы до 1575 (2010 г.) – 2200 м³/с (1991 г.). При этом модули поступления воды в речную систему могут достигать экстремально больших значений – 12 540–27 100 л/(с·км²).

Исследования максимального стока на малых (элементарных) водосборах

Изучение стока на лесогидрологическом стационаре «Аибга» [11–14] показало, что средняя величина стокообразующего дождя на элементарном водосборе оказывается равной 50 мм (коэффициент вариации ряда наблюдений $C_v = 0,62$, коэффициент асимметрии $C_s = 1,1$) при его продолжительности 11,4 ч ($C_v = 0,74$, $C_s = 1,9$). В качестве примера приведем анализ обычного летнего паводка от ливня 98 мм, выпавшего 25–26 мая 1966 г. на увлажненную почву со средней интенсивностью 0,04 мм/мин и давшего слой паводка 2,4 мм. Максимальный за период наблюдений до рубки леса (1964–1972 гг.) паводок прошел 14–16.06.1966. Непосредственно перед паводком, в период с 10.06 по 13.06, шли дожди, составившие 150,7 мм и увлажнившие почву до величин наименьшей влагоемкости (НВ). Прошедший ливень составил 122,7 мм, длился 16 ч, средняя интенсивность – 0,13 мм/мин. При этом

ядро ливня, обусловившее пик паводка редкой повторяемости, дало интенсивность 0,68 мм/мин в течение 70 мин (его слой составил 47,3 мм). Коэффициент склонового стока за этот паводок достиг 17,5 %, слой стока – 21,5 мм, максимальный модуль – 1934 л/с с км² (или 0,116 мм/мин). За весь период наблюдений паводок в июне 1966 г. был единственным, после прохождения которого под пологом леса были отмечены следы поверхностного стока по тальвегам и уплотненным местам в виде смытой подстилки и обнаженной поверхности почвы. Однако мутность воды в ручье не превышала 92 г/м³, хотя верхний рельеф водослива был заилен наполовину (около 0,2 м³ отложений из почвенно-грунтовых частиц, камней и остатков подстилки).

Паводки на водосборе площадью 12 га наблюдались более продолжительными во времени (60–144 ч зимой и 14–96 ч – летом) и были более распластаны – максимальные модули стока в 3 раза меньше, чем на водосборе 8 га. Средний коэффициент стока за паводок (по данным 40 паводков) составляет 3,8 % при $C_v = 1,3$, $C_s = 4,7$ и $E = 24,6$. Наибольшая интенсивность стока в среднем равна 0,006 мм/мин при варьировании этого показателя $C_v = 2,3$, асимметрии $C_s = 5,5$ и эксцессе $E = 30,0$. Максимальный коэффициент стока (32,2 %) наблюдался 14–18.06.1966; максимум интенсивности стока – 0,080 мм/мин. Измеренная в этот паводок мутность воды в ручье составила всего 27,3 г/м³.

В среднем максимальные годовые модули стока на малых водосборах в зоне буковых лесов невелики – от 1,1 до 19,3 л/с с га, а усредненные их значения под пологом нетронутого рубками леса равны 3,9–7,2 л/с с га. Коэффициенты паводкового стока не превышают 10 % для зимних паводков и 5–7 % – для летних. Наиболее интенсивные ливни дают паводки с коэффициентами стока до 25 %. Средние за период наблюдений коэффициенты паводкового стока на малых бассейнах составляют: в зимний период – 2,3–8,4 %, в летний – 0,8–4,8, при этом одинаковые осадки (в среднем 71–81 мм) дают зимой паводки больше в 1,8 раза, чем летом. Максимальная наблюденная интенсивность стока – 0,08 мм/мин.

Следует учесть, что в условиях легкопроницаемых с поверхности лесных почв преобладающее влияние на склоновый сток имеет форма графика дождя, которая в естественных условиях может быть самой различной, и учесть её в

прогностических расчётных зависимостях очень трудно.

Установлено, что в приморской части ЧПК даже расстроенные лесные насаждения выполняют водорегулирующие функции в 17 раз лучше, чем площади, находящиеся в интенсивном хозяйственном использовании.

Экспедиционные и стационарные исследования склонового стока показали, что в лесной зоне поверхностный горизонт почвы благодаря своим хорошим водно-физическим свойствам выполняет роль дренажной системы, особенно отчетливо проявляющей себя во время интенсивных летних ливней. С одной стороны, он переводит значительную часть осадков в склоновый сток, препятствуя развитию эрозионных процессов на поверхности почвы, а с другой – способствует восполнению убыли влаги нижележащих слоев, являющихся достаточно ёмким резервуаром доступной влаги. Наиболее уязвимой в гидрологическом отношении частью горных водосборов является область формирования речного стока, т.е. верховья рек, приуроченные к высокогорьям. В связи с этим в истоках рек должен соблюдаться строго ограниченный режим природопользования. В средней и нижней частях водосборов горных рек, как правило, находящихся в интенсивном хозяйственном обороте, ежегодный объем рубок главного и промежуточного пользования не должен превышать 1,5–2,0 % от лесопокрытой площади водосбора.

Минимальный сток на реках Сочинского Причерноморья

Анализ минимального (базисного) речного стока в регионе позволил установить, что он представляет собой глубоководное грунтовое питание, которое определяется как климатическими и геолого-геоморфологическими характеристиками речного бассейна, так и условиями подстилающей поверхности на водосборе. В связи с этим изменение растительности на водосборе и хозяйственные мероприятия неизбежно влекут за собой (при прочих неизменных условиях) трансформацию базисного стока – как его величины, так и доли в общем годовом стоке реки.

Минимальные суточные расходы воды могут быть определены с ошибками и поэтому давать неверные представления о базисном стоке. Более устойчивой величиной является минимальный го-

довой сток из средних минимумов за период 30 сут. Базисный сток, определяемый по этой величине, достаточно хорошо коррелирует с базисным стоком, рассчитанным по суточным минимумам (табл. 3).

По результатам анализа характеристик минимального стока рек Сочинского Причерноморья (для бассейнов рек площадью менее 4 тыс. км²) установлено, что наибольшее влияние на базисный сток рек оказывают площадь водосбора и его высота над уровнем моря.

Зависимости минимального 30-суточного стока от площади водосбора поддаются региональному районированию. В исследуемой зоне ЧПК нами выделено 3 гидрологических района, характеризующихся своими особенностями в условиях формирования стока (геоморфология, высота над уровнем моря, климат и др.).

1. Реки Черноморского побережья от р. Дюрсо до р. Туапсе – северо-западная часть ЧПК:

$$M_{\min} = 0,419 + 0,0042 F, \eta = 0,780. \quad (1)$$

2. Реки Сочинского Причерноморья от р. Аше до р. Псеузапсе:

$$M_{\min} = 2,20 + 0,0147 F, \eta = 0,827. \quad (2)$$

3. Реки Сочинского Причерноморья от р. Шахе до р. Мзымты – юго-восточная часть побережья с максимальным в регионе увлажнением:

$$M_{\min} = 12,4 + 0,0111 F, \eta = 0,938. \quad (3)$$

Здесь $M_{\min}$ – минимальный (базисный) сток реки, мм за год с 1 км²; F – площадь водосбора, км²; η – оценка точности зависимости, или коэффициент корреляции.

Данный метод рекомендуется использовать при подборе рек-аналогов, поскольку только для водосборов рек, входящих в один гидрологический район, можно ожидать сходные гидрологические процессы, для которых будут действительны разработанные модели. Для других водосборов необходима корректировка моделей путем внесения поправочных коэффициентов. В пределах каждой районной зависимости существует связь базисного стока от лесистости водосбора [15].

Таблица 3

Зависимости минимальных годовых расходов за 30 сут ($Q_{\min 30 \text{ сут}}$) от минимальных годовых расходов за 1 сут ($Q_{\min 1 \text{ сут}}$): $Q_{\min 30 \text{ сут}} = f(Q_{\min 1 \text{ сут}})$ / Depending on the minimum annual expenses for 30 days ($Q_{\min 30 \text{ days}}$) from the minimum annual expenses for 1 day ($Q_{\min 1 \text{ day}}$): $Q_{\min 30 \text{ days}} = f(Q_{\min 1 \text{ day}})$

Река	Пункт	Кол-во лет наблюдений	Коэффициент корреляции	$Y = a + b \times X$ $Q_{\min 30 \text{ c}} = a + b \times (Q_{\min 1 \text{ c}})$	
				a	b
Аше	с. Аше	26	0,91	0,55	1,023
Куапсе	с. Мамедова Щель	35	0,80	0,01	1,154
Псеузапсе	с.Татьяновка	26	0,70	0,50	1,148
Шахе	с. Солох-Аул	55	0,79	0,17	1,360
Псий	с. Тух-Аул	35	0,90	0,02	1,193
Сочи	с. Пластунка	54	0,79	-0,05	1,460
Хоста	пос. Хоста	45	0,70	0,44	0,820
Мзымта	р.п. Красная Поляна	35	0,94	-1,63	1,350

Выводы

В связи с участвовавшими в регионе катастрофическими паводками оценка максимального стока на реках Сочинского Причерноморья является важной задачей. При хозяйственном освоении территории необходима разработка современных проектных решений, учитывающих рост максимального стока, связанный как с изменением климатических условий в регионе, так и с состоянием поверхности водосборов рек.

Наиболее явно тенденция к увеличению паводков отмечается с 2014 г., и это связано с несколькими причинами.

Первая причина заключается в том, что происходящие климатические изменения способствуют развитию экстремальных синоптических ситуаций, нехарактерных для данного региона. В результате отмечается рост количества случаев выпадения локальных, очень сильных дождей (100 мм и более за период менее 12 ч), что приводит к формированию паводков категории опасного явления на отдельных реках.

Если раньше осадки интенсивностью 100 мм за 12 ч выпадали 1 раз в 3–5 лет, то последние 5 лет – ежегодно, а в 2011–2013 гг. – 2–4 раза в год.

При этом наиболее заметное увеличение сумм осадков уже отмечается и прогнозируется в теплый период года. Осадки в виде дождя станут более интенсивными, частично потому, что в атмосфере будет содержаться больше влаги. Так, по модельным расчетам, на большей части суши точное количество осадков, которое наблюдается в среднем раз в 20 лет, к концу XXI в. может выпадать каждые 10 лет или даже чаще.

Учитывая климатические прогнозы и складывающиеся тренды в изменениях сумм годовых осадков и роста случаев выпадения экстремальных осадков, необходимо отметить высокую вероятность роста количества катастрофических паводков, связанных с выпадением осадков категории опасного явления.

Второй фактор – антропогенный. Застройка пойм, низменных мест приводит к тому, что затопление жилых построек происходит уже при небольших подъемах уровня реки. Высокая засоренность русла рек, особенно малых, значительно снижает их пропускную способность, способствуя более быстрому выходу воды на пойму.

На фоне роста интенсивности выпадающих осадков, согласно климатическим прогнозам, будет наблюдаться тенденция к уменьшению частоты выпадения осадков. Эти изменения вызывают два, казалось бы, противоречащих друг другу эффекта: более интенсивные ливни, вызывающие большее число наводнений, и при этом более длительные засушливые периоды между дождями, приводящие к большему числу засух.

Поэтому в современных условиях критическими могут быть не только катастрофические паводки, но и минимальный сток рек, оказывающий влияние на водообеспечение развивающегося региона. Здесь также решающими могут быть условия хозяйственного использования территории основных рек региона.

Литература

1. Битюков Н.А. Гидрологический режим территории Сочинского Причерноморья // *European Geographical Studies*. 2018. № 5 (1). С. 3–20.
2. Алексеевский Н.И., Магрицкий Д.В., Колтерманн П.К., Торопов П.А., Школьный Д.И., Беяко-

ва П.А. Наводнения на Черноморском побережье Краснодарского края // *Водные ресурсы и режим водных объектов*. 2016. Т. 43, № 1. С. 3–17.

3. Магрицкий Д.В., Самохин М.А., Юмина Н.М. Наводнения в Краснодарском крае и Республике Адыгея // *Наука. Техника. Технология*. 2013. № 4. С. 44–63.

4. Бефани А.Н. Основные положения теории речного стока // *Тр. Одесского гидрометеороин-та*. Л.: Гидрометеиздат, 1958. Вып. 12. С. 99–164.

5. Бефани А.Н. Основы теории ливневого стока // *Тр. Одесского гидрометеороин-та*. Л.: Гидрометеиздат, 1958. Вып. 14. 310 с.

6. Государственный водный кадастр. 1971–1988. Ежегодные данные о режиме и ресурсах поверхностных вод суши. Ч. 1: Реки и каналы. Бассейны рек северо-восточного побережья Черного моря, бассейн Кубани. Обнинск: ВНИИГМИ МИД РСФСР, 1989. Т. 1, вып. 1.

7. Государственный водный кадастр. 2004. Ресурсы поверхностных и подземных вод, их использование и качество. М.: Метеоагентство Росгидромета, 2005.

8. Ресурсы поверхностных вод СССР. Северный Кавказ. Л.: Гидрометеиздат, 1973. Т. 8. 446 с.

9. Ресурсы поверхностных вод СССР. Гидрологическая изученность. Северный Кавказ. Л.: Гидрометеиздат, 1975. Т. 8. 380 с.

10. Ткаченко Ю.Ю., Перов Е.А., Денисов В.И. Атлас опасных природных явлений Краснодарского края. Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2018. 160 с.

11. Битюков Н.А. Речной сток в условиях Черноморского побережья Кавказ // *Докл. Соч. отд. Геогр. общ-ва при АН СССР*. 1971. Вып. 2. С. 184–189.

12. Битюков Н.А. Влияние буковых насаждений на дождевые осадки // *Тр. Соч. НИЛОС*. Сочи, 1971. Вып. 6. С. 33–40.

13. Битюков Н.А. Мониторинг экосистем буковых лесов Сочинского Причерноморья // *Науч. тр. Соч. нац. парка*. 2013. Вып. 5. 391 с.

14. Битюков Н.А., Шагаров Л.М. Мониторинг атмосферных осадков в буковых лесах Черноморского побережья Кавказа // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2013. № 1. С. 67–71.

15. Шенутко В.А. Современные математические модели многолетних колебаний стока // *Методы расчета речного стока*. М.: Изд-во МГУ, 1980. Ч. II. С. 85–110.

References

1. Bityukov N.A. Hidrologicheskii rezhim territorii Sochinskogo Prichernomor'ya [Hydrological regime of the territory of the Sochi Black Sea region]. *European Geographical Studies*. 2018, No. 5 (1), pp. 3–20.
2. Alekseevskii N.I., Magritskii D.V., Koltermann P.K., Toropov P.A., Shkol'nyi D.I., Belyakova P.A. Navodneniya na Chernomorskom poberezh'e Krasno-

darskogo kraia [Floods on the Black Sea coast of Krasnodar region]. *Vodnye resursy i rezhim vodnykh ob'ektov*. 2016, vol. 43, No. 1, pp. 3-17.

3. Magritskii D.V., Samokhin M.A., Yumina N.M. Navodneniya v Krasnodarskom krae i Respublike Adygeya [Floods in Krasnodar region and the Republic of Adygea]. *Nauka. Tekhnika. Tekhnologiya*. 2013, No. 4, pp. 44-63.

4. Befani A.N. [Basic provisions of the theory of river flow]. *Tr. Odesskogo gidrometeoin-ta* [Proceedings of the Odessa Hydrometeorological Institute]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1958, iss. 12, pp. 99-164.

5. Befani A.N. [Fundamentals of the theory of storm runoff]. *Tr. Odesskogo gidrometeoin-ta* [Proceedings of the Odessa Hydrometeorological Institute]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1958, iss. 14, 310 p.

6. Gosudarstvennyi vodnyi kadastr. 1971–1988. *Ezhegodnye dannye o rezhime i resursakh poverkhnostnykh vod sushy* [State water cadastre. 1971–1988. Annual data on the regime and resources of surface land waters]. Part 1: Rivers and canals. River basins of the North-East coast of the Black sea, Kuban basin. Obninsk: VNIIGMI MID RSFSR, 1989, vol. 1, iss. 1.

7. Gosudarstvennyi vodnyi kadastr. 2004. *Resursy poverkhnostnykh i podzemnykh vod, ikh ispol'zovanie i kachestvo* [State water cadastre. 2004. Surface and groundwater resources, their use and quality]. Moscow: Meteorologicheskoye Rosgidrometa, 2005.

8. *Resursy poverkhnostnykh vod SSSR. Severnyi Kavkaz* [Surface water resources of the USSR. Northern Caucasus]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1973, vol. 8, 446 p.

9. *Resursy poverkhnostnykh vod SSSR. Gidrologicheskaya izuchennost'. Severnyi Kavkaz* [Surface water resources of the USSR. Hydrological study. Northern Caucasus]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1975, vol. 8, 380 p.

10. Tkachenko Yu.Yu., Perov E.A., Denisov V.I. *Atlas opasnykh prirodnnykh yavlenii Krasnodarskogo kraia* [Atlas of dangerous natural phenomena of Krasnodar region]. Rostov-on-Don; Taganrog: Izd-vo YuFU, 2018, 160 p.

11. Bityukov N.A. Rechnoi stok v usloviyakh Chernomorskogo poberezh'ya Kavkaza [River flow in the conditions of the Black Sea coast of Caucasus]. *Dokl. Soch. otd. Geogr. obshch-va pri AN SSSR*. 1971, iss. 2, pp. 184-189.

12. Bityukov N.A. [Influence of beech plantations on rainfall]. *Tr. Sochinskoi NILOS* [Proceedings of Sochi NILOS]. Sochi, 1971, iss. 6, pp. 33-40.

13. Bityukov N.A. [Monitoring of beech forest ecosystems of the Sochi black Sea region]. *Nauch. tr. Soch. nats. Parka* [Scientific works of the Sochi National Park]. 2013, iss. 5, 391 p.

14. Bityukov N.A., Shagarov L.M. Monitoring atmosferykh osadkov v bukovykh lesakh Chernomorskogo poberezh'ya Kavkaza [Monitoring of atmospheric precipitation in beech forests of the Black Sea coast of the Caucasus]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2013, No. 1, pp. 67-71.

15. Sheputko V.A. [Modern mathematical models of long-term fluctuations of runoff]. *Metody rascheta rechnogo stoka* [Methods of calculation of runoff]. Moscow: Izd-vo MGU, 1980, ch. II, pp. 85-110.

УДК 911.52

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-62-70

ПРИРОДНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЛАНДШАФТОВ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. А.М. Иванченко¹, А.Н. Коновалов¹, И.В. Бессмертный¹,
А.Д. Хованский¹, В.В. Латун¹, Ю.Ю. Меринова¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

THE LANDSCAPES NATURAL POTENTIAL OF THE ROSTOV REGION

A.M. Ivanchenko¹, A.N. Konovalov¹, I.V. Bessmertnyi¹,
A.D. Khovanskii¹, V.V. Latun¹, Yu.Yu. Merinova¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Иванченко Анастасия Михайловна – аспирант, кафедра социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: a.m.ivan@yandex.ru

Anastasiya M. Ivanchenko - Postgraduate, Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: a.m.ivan@yandex.ru

Коновалов Александр Николаевич – аспирант, кафедра социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: alx.konoval@gmail.com

Alexandr N. Konovalov - Postgraduate, Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: alx.konoval@gmail.com

Бессмертный Илья Валерьевич – аспирант, кафедра социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: bessmertny74@gmail.com

Iliya V. Bessmertnyi - Postgraduate, Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: bessmertny74@gmail.com

Хованский Александр Дмитриевич – доктор географических наук, профессор, кафедра социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: khovansk@yandex.ru

Alexandr D. Khovanskii - Doctor of Geography, Professor, Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: khovansk@yandex.ru

Латун Владимир Владимирович – кандидат географических наук, заведующий кафедрой социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: vlatun@yandex.ru

Vladimir V. Latun - Candidate of Geography, Head of the Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vlatun@yandex.ru

Меринова Юлия Юрьевна – кандидат географических наук, доцент, кафедра социально-экономической географии и природопользования, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: yuliyamerinova@yandex.ru

Yuliya Yu. Merinova - Candidate of Geography, Associate Professor, Department of Socio-Economic Geography and Nature Management, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: yuliyamerinova@yandex.ru

Несмотря на значительное антропогенное преобразование природных ландшафтов, их природный потенциал в значительной мере сохранился и оказывает существенное влияние на размещение населения, характер хозяйственного использования территории, формирование экологической ситуации. Природный потенциал ландшафтов включает климатический, ресурсный и экологический потенциалы. Климатический формирует особенности расселения насе-

ния и ведения тех или иных видов деятельности. Ресурсный потенциал определяет особенности использования природных ресурсов в экономике. Экологический представляет возможности ландшафтов противостоять негативным воздействиям хозяйственной деятельности на природную среду и определяется их устойчивостью к антропогенному воздействию.

Представлены анализ природного потенциала ландшафтов Ростовской области и оценка его влияния на размещение населения и хозяйства, состояние окружающей среды. По особенностям географического положения, сочетанию климатического, ресурсного и экологического потенциала в пределах Ростовской области выделены семь природно-ресурсных зон: Северо-Западная, Северо-Восточная, Донецкая, Центральная, Юго-Западная, Южная и Юго-Восточная. Наиболее высокими интегральными показателями природно-ресурсной обеспеченности обладают Юго-Западная и Центральная зоны, наименьшими – Северо-Восточная и Юго-Восточная.

Ключевые слова: природный потенциал территории, типы ландшафтов, природно-ресурсное районирование, Ростовская область.

The landscapes natural potential has been largely preserved, despite the significant anthropogenic transformation. It has a significant impact on the distribution of population, the pattern of territory's economic use, the formation of ecological situation. The natural potential of landscapes includes climatic, resource and ecological potentials. Climatic potential characterizes the possibilities of landscapes for the settlement and residence of people, the conduct of certain activities. Resource potential determines the possibilities of landscapes for the use of natural resources in economy. Ecological potential represents the ability of landscapes to withstand the negative impacts of economic activity on environment. Resistance of natural landscapes to anthropogenic impact determine this potential.

The article presents an analysis of the Rostov Region's landscapes natural potential and an assessment of its impact on the distribution of population and economy, and the state of the environment. According to the peculiarities of the geographical location, the combination of climatic, resource and environmental potentials, the Rostov Region consists of a seven natural resource zones: North-West, North-East, Donetsk, Central, South-West, South and South-East. The South-West and Central zones stand out as the highest integral indicators of natural resource provision, and the North-East and South-East are the lowest.

Keywords: natural potential of the territory, types of landscapes, natural resource zoning, Rostov Region.

Природная среда относится к сложным системам, которые формируются под влиянием многих факторов. На разных участках эти факторы и их сочетания проявляются неодинаково. В результате возникают сравнительно однородные природные комплексы, характеризующиеся определенными условиями и взаимосвязями между отдельными компонентами. Такие комплексы представляют собой своеобразные структурные единицы территорий – природные ландшафты.

Интенсивное хозяйственное освоение Ростовской области привело к тому, что в настоящее время природные ландшафты занимают менее 10 % ее территории. Однако их потенциал в значительной мере сохранился и оказывает существенное влияние на размещение населения, характер хозяйственного использования территории, формирование экологической ситуации.

В связи с этим важное значение имеет изучение природного потенциала ландшафтов, его структуры и отдельных параметров, пространственной дифференциации и влияния на расположение населенных пунктов, развитие экономики и состояние окружающей среды.

Цель данной работы – анализ потенциала ландшафтов Ростовской области, оценка его влияния на размещение населения и хозяйства, состояние окружающей среды, природно-ресурсное зонирование региона.

В Ростовской области распространены три зональных типа природных ландшафтов: степной, сухостепной и полупустынный, которые сменяют друг друга с запада на восток [1].

Степной тип ландшафтов занимает почти всю территорию области, кроме ее юго-восточной части. Под влиянием изменения увлажнения он подразделяется на три подтипа: умеренно засушливый, засушливый и очень засушливый.

Сухостепной тип ландшафтов занимает восточную часть Доно-Чирского междуречья и среднюю часть Сало-Маньчской равнины, простираясь на запад по долине Маньча. С увеличением количества тепла и снижением влагообеспеченности в восточном направлении выделяются три подтипа: умеренно сухой, сухой и очень сухой.

Полупустынный тип ландшафтов приурочен к склонам и надпойменным террасам рек восточной окраины Сало-Маньчской равнины,

а водоразделы заняты пустынной дерновинно-злаковой степью.

По долинам рек и балок распространены три интразональных типа ландшафтов: луговой, лесной и степной. Луговой тип встречается в поймах Дона, Северского Донца, Чира, Сала и Маныча. Остепненные луга недостаточного увлажнения доминируют в поймах Сала и Чира. Лесные ландшафты расположены в балках, поймах рек и на песчаных массивах.

Природный потенциал ландшафтов включает климатический, ресурсный и экологический потенциалы. Климатический характеризует возможности для расселения и проживания людей, ведение тех или иных видов деятельности. Ресурсный определяет особенности использования природных ресурсов в хозяйственной деятельности. Экологический потенциал представляет возможности ландшафтов противостоять негативным воздействиям хозяйственного освоения на природную среду и определяется устойчивостью природных ландшафтов к антропогенному воздействию.

В связи с тем что значительная часть параметров и статистических данных, характеризующих природный потенциал ландшафтов, приводится по административным районам, в табл. 1 приведено соотношение природных ландшафтов и административных районов Ростовской области. Административные районы в соответствии с [2] сгруппированы в природно-ресурсные зоны (табл. 2).

Климатический потенциал ландшафтов определяется сочетанием солнечного тепла и света, атмосферных осадков, влажности воздуха, скорости и направления ветра, годовыми и суточными перепадами температур и другими показателями.

В силу своего географического положения отдельные части Ростовской области существенно различаются по основным показателям климатических условий (табл. 2), имеющих большое значение как для самого человека, так и для многих видов его деятельности и в значительной степени определяющих их хозяйственную специализацию.

Таблица 1

Соотношение природно-ресурсных районов, природных ландшафтов и административных районов Ростовской области
/ The ratio of natural resource areas, natural landscapes and administrative districts of the Rostov Region

Природно-ресурсный район	Природный ландшафт			Административный район
	Тип	Подтип	Род	
Северо-Западный	Степной	Умеренно засушливый	Донской	Верхнедонской, Шолоховский
		Засушливый	Глубокинский Калитвинский	Миллеровский, Тарасовский Боковский, Чертковский, Кашарский
Северо-Восточный	Степной	Очень засушливый	Цимлянский	Советский, Обливский, Милютинский, Морозовский, Тагинский, Константиновский, Цимлянский
Донецкий	Степной	Умеренно засушливый	Кундрюченский	Каменский, Красносулинский
		Засушливый	Калитвинский Тузловский	Белокалитвинский Усть-Донецкий, Октябрьский
Юго-Западный	Степной	Умеренно засушливый	Тузловский Кагальницкий	Родионово-Несветайский, Мясниковский, Аксайский Азовский
		Засушливый	Миусский	Куйбышевский, Матвеево-Курганский, Неклиновский
Центральный	Степной	Очень засушливый	Западно-Сальский	Мартыновский, Веселовский, Пролетарский, Багаевский, Семикаракорский
	Луговой	Настоящие и остепненные луга	Нижнедонской, Сальский	Багаевский, Волгодонской
Южный	Степной	Умеренно засушливый	Кагальницкий	Кагальницкий, Зерноградский, Егорлыкский, Целинский
		Засушливый	Егорлыкский	Сальский, Песчанокопский
Юго-Восточный	Сухостепной	Умеренно сухой	Чирский Центрально-Сальский	Обливский Дубовский, Орловский, Зимовниковский
		Сухой	Восточно-Сальский	Ремонтненский, Заветинский
	Полупустынный		Джурак-Сальский	Ремонтненский, Заветинский

Таблица 2

Комплексная характеристика природных ресурсов Ростовской области (по данным [1, 3, 4])
/ Complex characteristics of natural resources of the Rostov Region

Природно-ресурсная зона и административный район	Земельные ресурсы		Климатические ресурсы			Растительные ресурсы			Водные ресурсы		Индекс устойчивости ландшафтов
	Бонитет пашни, балл	Средняя урожайность зерновых, ц/га	Сумма осадков, мм	Сумма $t^{\circ} > 10^{\circ}$	Биоклиматический потенциал	Первичная биологическая продуктивность, т/га	Оценка пастбищ (сенокосов), балл	Лесные ресурсы, га	Модуль стока рек весной, мм	Подземные воды, млн м ³ /год	
Северо-Западная	54	26,6	440	3006	3,1	8,4	7 (10,6)	144420	80-100	1059,1	0,21
Верхнедонской	54	26,2	421	2976	2,98	9,3	8(12)	35469	80–100	243,8	0,20
Шолоховский	53	26,2	444	3039	3,16	9,3	8(16)	37219	80–100	271,6	0,21
Кашарский	53	26,8	461	3068	2,93	7,7	7(12)	7648	80–100	93,1	0,16
Чертковский	55	26,8	422	2919	3,04	7,7	6(8)	11422	80–100	80,3	0,17
Боковский	53	26,8	425	3019	3,06	7,7	6(8)	12122	80–100	93,1	0,13
Миллеровский	54	26,8	451	2983	3,16	8,5	6(8)	16317	80–100	139,1	0,32
Тарасовский	55	26,8	455	3041	3,28	8,5	8(10)	24223	80–100	138,1	0,25
Северо-Восточная	46	30,7	383	3132	3,1	7,6	7(9)	32994	60	269,6	0,18
Милютинский	53	30,7	372	3065	2,99	7,6	7(9)	5774	60	70,6	0,20
Морозовский	46	30,7	377	3065	2,99	7,6	7(8)	3174	60	93,6	0,19
Обливский	45	30,7	388	3136	3,09	7,6	7(7)	11336	60	105,4	0,17
Советский	45	30,7	388	3136	3,09	7,6	8(8)	4823	60	...	0,15
Цимлянский	42	30,7	388	3260	3,21	7,6	6(13)	7887	40	...	0,19
Донецкая	56	34,4	418	3212	3,5	8,2	7,8(9,7)	49315	80	297,2	0,23
Белокалитвинский	54	30,7	419	3259	3,78	7,7	6(6)	6874	80–100	41,0	0,15
Каменский	53	32,7	414	3191	3,70	8,2	6(6)	20563	80	12,7	0,20
Красносулинский	57	32,7	418	3126	3,63	8,2	7(13)	2541	80	17,0	0,20
Октябрьский	61	39,9	423	3126	3,19	8,6	7(19)	1156	60	24,5	0,25
Усть-Донецкий	56	39,9	423	3313	3,15	8,6	7(8)	14224	60	130,6	0,36
Тацинский	55	30,7	408	3259	3,32	7,6	6(6)	3957	60	71,4	0,20
Центральная	53	37,3	412	3299	3,1	9,5	6,9(11,3)	20661	40	232,2	0,26
Константиновский	54	32,7	413	3313	3,45	7,6	6(9)	5064	60	41,9	0,22
Багаевский	56	39,1	423	3284	3,07	12,5	7(15)	1512	40	...	0,27
Веселовский	60	37,6	397	3297	2,99	8,4	8(8)	126	40	...	0,36
Волгодонской	47	39,1	409	3260	3,08	12,5	6(13)	684	40	38,4	0,25
Мартыновский	51	37,6	409	3214	3,03	8,4	8(13)	5341	40	65,6	0,27
Семикаракорский	59	37,6	418	3284	3,13	8,4	7(15)	4495	40	20,5	0,30
Пролетарский	46	37,6	417	3439	3,25	8,4	6(6)	3439	40	65,8	0,18
Юго-Западная	63	42,3	446	3261	3,6	9,4	6,7(9,7)	7042	60	534	0,37
Азовский	67	42,6	500	3382	4,13	11,3	6(11)	4901	40	72,5	0,43
Аксайский	61	39,9	497	3385	4,06	8,6	7(15)	331	60	48,1	0,42
Матвеево-Курганский	63	44,7	422	3177	3,24	9,5	7(-)	962	60	213,2	0,41
Куйбышевский	62	44,7	399	3144	3,09	9,5	7(10)	510	60	51,3	0,36
Неклиновский	65	44,7	454	3363	3,70	9,5	7(11)	250	60	85,2	0,35
Родионово-Несветайский	60	39,9	397	3126	3,08	8,6	6(7)	88	60	59,0	0,25
Мясниковский	66	39,9	454	3250	3,58	8,6	7(14)	–	60	4,7	0,34

Окончание табл. 2

Природно-ресурсная зона и административный район	Земельные ресурсы		Климатические ресурсы			Растительные ресурсы			Водные ресурсы		Индекс устойчивости ландшафтов
	Бонитет пашни, балл	Средняя урожайность зерновых, ц/га	Сумма осадков, мм	Сумма $t^{\circ} > 10^{\circ}$	Биоклиматический потенциал	Первичная биологическая продуктивность, т/га	Оценка пастбищ (сенокосов), балл	Лесные ресурсы, га	Модуль стока рек весной, мм	Подземные воды, млн м ³ /год	
Южная	67	42,6	474	3305	3,6	10,6	6,3(4,8)	4502	40	421,4	0,42
Егорлыкский	69	42,6	525	3238	4,14	11,3	6(10)	128	40	48,4	0,36
Зерноградский	70	42,6	486	3238	3,82	11,3	7(13)	1715	40	185,2	0,53
Кагальницкий	71	42,6	482	3238	3,76	11,3	8(–)	111	40	...	0,55
Песчанокопский	65	45,1	462	3465	3,35	9,3	5(–)	155	40	51,5	0,38
Сальский	58	45,1	453	3432	3,29	9,3	6(6)	1985	40	65,3	0,36
Целинский	66	42,6	435	3216	3,06	11,3	6–0	408	40	71,0	0,36
Юго-Восточная	32	34,2	356	3260	2,9	7,1	5,6 (4,4)	10445	20-40	343,7	0,08
Дубовский	31	36,2	365	3193	3,04	7,6	7(5)	3565	40	66,0	0,07
Зимовниковский	35	36,2	379	3215	2,9	7,6	5(5)	3036	40	102,4	0,09
Орловский	45	36,2	373	3343	3,24	7,6	6(6)	3308	40	30,6	0,15
Заветинский	21	31,1	341	3306	2,8	6,4	6(6)	448	20	85,7	0,03
Ремонтненский	28	31,1	322	3242	2,69	6,4	4(–)	88	20	59,0	0,05

Наиболее оптимальное сочетание климатических показателей для проживания людей и развития сельского хозяйства характерно для южных и юго-западных районов области. Они же выделяются и самой высокой биологической продуктивностью. По всем параметрам благоприятности климатических условий эти территории заметно превосходят другие районы.

Наихудшим сочетанием подавляющего большинства климатических показателей выделяются районы северо-восточной и особенно юго-восточной зон. В последней высокий радиационный баланс солнечной энергии и среднегодовых температур сводится на нет крайне низкой атмосферной увлажненностью территории, что в итоге ведет к минимальному в области климатическому потенциалу.

Ресурсный потенциал ландшафтов составляют наличие, количество и качество находящихся в нем природных ресурсов: водных, земельных, растительных, минеральных, рекреационных и др. Основные показатели природных

ресурсов ландшафтов Ростовской области представлены в табл. 2.

Важной частью природно-ресурсного потенциала Ростовской области являются земельные ресурсы, в структуре которых особую ценность представляют высокоплодородные южные, обыкновенные и предкавказские черноземы, занимающие около 2/3 территории региона. В то же время наблюдаются существенные территориальные различия как по качественным показателям земельных ресурсов, так и по степени их нарушенности. Бонитет почв пашни колеблется от 21 (восточная агроклиматическая зона) до 70 баллов (южная зона) из 100 возможных. Высокие экономические показатели имеют сельские районы центральной и южной зоны области. Низкими показателями сельскохозяйственного производства отличаются удаленные северо-восточные и восточные районы.

Ростовская область находится в зоне недостаточного увлажнения и относительно слабо обеспечена поверхностными водными ресурсами,

формирующимися на ее территории, и пресными подземными водами. Их использование осложняется неравномерностью распределения по территории, большими колебаниями стока по годам и временам года и повышенной минерализацией подземных вод. Намного лучше обеспечена область суммарными водными ресурсами, включающими транзитные воды. Однако использование транзитных вод рек Дон и Северский Донец, на которые приходится 88,7 % всего поверхностного стока области, находится в большой зависимости от вышележащих по их течению территорий.

Минеральные ресурсы Ростовской области представлены в основном углем, газом и природными строительными материалами. Особую ценность имеет каменный уголь Восточного Донбасса, запасы которого оцениваются в 9,3 млрд т. Почти 82 % углей относятся к высококалорийным антрацитам и 4,2 % оставляют коксующиеся угли.

В недрах Ростовской области содержатся также месторождения нефти и газа (Тарасовский, Азовский, Неклиновский районы), строительных материалов: песчаников, песков, кварцитов (Миллеровский, Каменский, Багаевский, Аксайский районы), известняков (Каменский, Октябрьский, Тацинский районы), кирпично-черепичного сырья (Неклиновский, Сальский районы) и др.

Растительными ресурсами Ростовская область обеспечена недостаточно. Лишь 2,2 % территории области покрыты лесами, которые практически не имеют промышленной ценности, но выполняют важные водоохранные, почвозащитные, санитарно-гигиенические и оздоровительные функции. Основная часть лесов находится в северных и северо-западных, а также в Каменском и Усть-Донецком районах области. Естественная степная растительность сохранилась в наибольшей степени на востоке области, где она интенсивно используется для выпаса скота.

Экологический потенциал ландшафтов представляет их возможности противостоять негативным антропогенным воздействиям на природную среду и характеризует устойчивость природных ландшафтов. Устойчивость природных ландшафтов к антропогенному воздействию определяется

скоростью химических превращений органических и минеральных соединений, интенсивностью выноса вещества за пределы ландшафтов или рассеянием на большой площади.

Скорость различных преобразований в природной среде зависит, прежде всего, от количества поступающей энергии, источниками которой являются солнечная радиация, ветер, атмосферные осадки. Указанные факторы учитываются при ландшафтной дифференциации территории. Кроме того, устойчивость ландшафтов отражается с помощью индекса устойчивости, определяемого соотношением использованной растениями лучистой энергии к общей массе поглощенной на этой территории энергии.

Интенсивность преобразования продуктов техногенеза в ландшафтах определяется аэро- и гидродинамическими, а также почвообразовательными процессами. При определении устойчивости ландшафтов Ростовской области учитывались среднегодовая скорость ветра, годовая повторяемость штилей, атмосферные осадки, слой стока 10%-й обеспеченности, средний уклон местности, расчлененность рельефа.

По данным В.Е. Закруткина и др. [3], средний для области индекс устойчивости равен 0,21. В пределах области индекс устойчивости изменяется от 0,03 (Заветинский район) до 0,55 (Кагальницкий район).

Наибольшей устойчивостью обладают ландшафты южных и юго-западных районов области, расположенные в степной зоне с повышенным увлажнением и мощными черноземами. При переходе в сухостепную и полупустынную зоны с увеличением аридности климата и снижением мощности почв устойчивость ландшафтов резко снижается.

Природно-ресурсное районирование Ростовской области. На основании представленных выше данных, по особенностям географического положения, сочетанию климатического, ресурсного и экологического потенциала, а также хозяйственной специализации отдельных частей территории, в пределах Ростовской области нами выделены семь природно-ресурсных зон: Северо-Западная, Северо-Восточная, Донецкая, Центральная, Юго-Западная, Южная и Юго-Восточная (рисунок, табл. 2, 3).

Природно-ресурсные зоны

- I. Юго-Западная
- II. Донецкая
- III. Центральная
- IV. Северо-Западная
- V. Северо-Восточная
- VI. Южная
- VII. Юго-Восточная

АДМИНИСТРАТИВНЫЕ РАЙОНЫ:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1. Азовский | 22. Миллеровский |
| 2. Аксайский | 23. Милютинский |
| 3. Багаевский | 24. Морозовский |
| 4. Белокалитвинский | 25. Мясниковский |
| 5. Боковский | 26. Неклиновский |
| 6. Верхнедонской | 27. Обливский |
| 7. Веселовский | 28. Октябрьский |
| 8. Волгодонской | 29. Орловский |
| 9. Дубовский | 30. Песчанокопский |
| 10. Егорлыкский | 31. Пролетарский |
| 11. Заветинский | 32. Ремонтненский |
| 12. Зерноградский | 33. Родионово-Несветайский |
| 13. Зимовниковский | 34. Сальский |
| 14. Кагальницкий | 35. Семикаракорский |
| 15. Каменский | 36. Советский |
| 16. Кашарский | 37. Тарасовский |
| 17. Константиновский | 38. Тагинский |
| 18. Красносулинский | 39. Усть-Донецкий |
| 19. Куибышевский | 40. Целинский |
| 20. Мартыновский | 41. Цимлянский |
| 21. Матвеево-Курганский | 42. Чертовский |
| | 43. Шолоховский |

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Административная граница Ростовской области
- Границы административных районов Ростовской области
- Границы природно-ресурсных районов Ростовской области



- 1. Земельные ресурсы
- 2. Климатические ресурсы
- 3. Растительные ресурсы
- 4. Водные ресурсы
- 5. Минеральные ресурсы
- 6. Экологический потенциал ландшафтов

Суммарный балл

- 6 баллов
- 15 баллов
- 21 балл
- 22 балла
- 23 балла

Таблица 3

Ранжирование природно-ресурсных зон Ростовской области по отдельным видам природных ресурсов, баллы
/ Ranking of Rostov Region's natural resource zones by certain types of natural resources, points

Природно-ресурсная зона	Земельные ресурсы	Климатические ресурсы	Растительные ресурсы	Водные ресурсы	Минеральные ресурсы	Экологический потенциал ландшафтов	Сумма баллов
Юго-Западная	5	4	3	3	4	4	23
Южная	5	5	3	2	3	5	23
Донецкая	3	3	4	4	5	3	22
Северо-Западная	3	3	5	5	3	3	22
Центральная	4	4	4	3	3	3	21
Северо-Восточная	2	2	4	3	2	2	15
Юго-Восточная	1	1	1	1	1	1	6

Между природными ландшафтами и типами хозяйственного использования территории существует закономерная связь, хотя полного совпадения границ между ними не наблюдается. Природные условия влияют на формирование определенных видов хозяйственной деятельности, а природные ресурсы выступают чаще всего как основная причина зарождения экономических районов и их специализации. Типы природопользования оказывают значительное влияние на экологическую ситуацию [2].

Наиболее высокими интегральными показателями природно-ресурсного потенциала, полученными в результате ранжирования административных единиц области по отдельным видам природных условий и ресурсов, обладают Юго-Западная и Южная зоны.

Высокий климатический потенциал природных ландшафтов Юго-Западной зоны, наличие основных природных ресурсов, выгодное географическое положение способствовали формированию и развитию Ростовской агломерации, в состав которой входят крупный промышленный центр – г. Ростов-на-Дону, средние индустриальные города Новочеркасск, Таганрог, города-спутники крупного промышленного центра Азов, Батайск, сельские пригородные районы урбанизированной зоны. В Ростовской агломерации проживает 52 % населения Ростовской области, сосредоточено более 66 % мощностей промышленности и более 54 % производства электроэнергии. Ландшафты Юго-Западной зоны обладают высокой устойчивостью к антропогенному воздействию.

Наличие в Донецкой природно-ресурсной зоне Восточно-Донецкого каменноугольного

бассейна с высоким качеством угля и относительно крупными его запасами, а также весьма выгодное географическое положение способствовали формированию Донецкой агломерации, в которую входят шахтерские города Шахты, Новошахтинск, Гуково, Донецк, Зверево, Каменск-Шахтинский и прилегающие сельские районы. Большая глубина залегания угольных пластов при сравнительно небольшой их мощности, шахтный способ добычи угля, высокая его себестоимость привели к необходимости реструктуризации угольной промышленности и закрытию многих нерентабельных шахт, снижению производства, уменьшению числа рабочих мест и оттоку населения. В Донецкой зоне преобладают ландшафты со средней устойчивостью к антропогенному воздействию.

В Южной, Центральной и Северо-Западной природно-ресурсных зонах главным природным богатством являются земельные ресурсы. Благоприятные природные условия и высокоплодородные черноземы способствовали развитию в этих районах сельского хозяйства. Однако в результате интенсивного сельскохозяйственного производства наблюдается прогрессирующее распространение следующих негативных процессов: водная и ветровая эрозия, деградация почв, засоление, осолонцевание и др. Эрозионные процессы ведут к уменьшению содержания гумуса и снижению плодородия почв. Водная эрозия преобладает в северных, ветровая – в южных и восточных районах области. Ландшафты Южной и Центральной зон характеризуются высокой и средней устойчивостью к антропогенному воздействию, а Северо-Западной – средней и низкой устойчивостью.

В Северо-Восточной и Юго-Восточной природно-ресурсных зонах отмечаются минимальные значения большинства показателей природного потенциала ландшафтов. Эти зоны отличаются относительно неблагоприятными природными условиями, низкой плотностью населения и слабым развитием производства. В восточных районах области, в связи с их низкой устойчивостью к антропогенному воздействию, широкое распространение получили процессы опустынивания земель.

Выводы

1. Природный потенциал ландшафтов включает климатический потенциал, характеризующий возможности ландшафтов для расселения и проживания людей, ведения тех или иных видов деятельности, ресурсный потенциал, представляющий возможности ландшафтов по использованию природных ресурсов, и экологический потенциал, определяющий устойчивость природных ландшафтов к антропогенному воздействию.

2. Природный потенциал ландшафтов оказывает значительное влияние на размещение населения, формирование определенных типов хозяйственного использования территории, устойчивость ландшафтов к антропогенному воздействию и формирование экологической ситуации.

3. По особенностям географического положения, сочетанию климатического, ресурсного и экологического потенциала в пределах Ростовской области выделены семь природно-ресурсных зон: Северо-Западная, Северо-Восточная, Донецкая, Центральная, Юго-Западная, Южная и Юго-Восточная. Наиболее высокими интегральными показателями природно-ресурсной обеспеченности обладают Юго-Западная и Центральная зоны, наименьшими – Северо-Восточная и Юго-Восточная.

Литература

1. Природные условия и естественные ресурсы Ростовской области / под ред. Ю.П. Хрусталёва [и др.].

Ростов н/Д.; Батайск : Батайское книжное изд-во, 2002. 432 с.

2. Хованский А.Д., Латун В.В., Хорошев О.А., Меринова Ю.Ю., Богачев И.В., Кравченко А.М. Типы природопользования и экологическая ситуация в Ростовской области // Экология. Экономика. Информатика. Системный анализ и моделирование экономических и экологических систем. 2018. Т. 1, № 3. С. 262–269.

3. Экологический атлас Ростовской области / под ред. В.Е. Закруткина [и др.]. Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. 120 с.

4. Зональные системы земледелия Ростовской области (на период 2013–2020 гг.) в 3 ч. Ч. 1. Ростов н/Д.: Министерство сельского хозяйства и продовольствия Ростовской области, 2012. URL: <http://don-agro.ru> (дата обращения: 09.09.2019).

5. Орлинский А.С. Эколого-хозяйственная сбалансированность и устойчивое развитие Ростовской области : дис. ... канд. геогр. наук. Ростов н/Д., 2006. 243 с.

References

1. *Prirodnye usloviya i estestvennye resursy Rostovskoi oblasti* [Natural conditions and natural resources of Rostov region]. Eds. Yu.P. Khrustalev et al. Rostov-on-Don, Bataisk: Bataiskoe knizhnoe izd-vo, 2002, 432 p.

2. Khovanskii A.D., Latun V.V., Khoroshev O.A., Merinova Yu.Yu., Bogachev I.V., Kravchenko A.M. Tipy prirodo-pol'zovaniya i ekologicheskaya situatsiya v Rostovskoi oblasti [The types of nature management and ecological situation in Rostov region]. *Ekologiya. Ekonomika. Informatika. Sistemnyi analiz i modelirovanie ekonomicheskikh i ekologicheskikh sistem*. 2018, vol. 1, No. 3, pp. 262-269.

3. *Ekologicheskii atlas Rostovskoi oblasti* [Environmental atlas of the Rostov region]. Eds. V.E. Zakrutkin et al. Rostov-on-Don: Izd-vo SKNTs VSh, 2000, 120 p.

4. *Zonal'nye sistemy zemledeliya Rostovskoi oblasti (2013-2020)* [The zonal systems of Rostov region's agriculture (2013-2020)]. Rostov-on-Don: Ministerstvo sel'skogo khozyaistva i prodovol'stviya Rostovskoi oblasti, 2012, part 1. Available at: <http://don-agro.ru> (accessed 09.09.2019).

5. Orlynskiy A.S. *Ekologo-khozyaistvennaya sbalansirovannost' i ustoichivoe razvitie Rostovskoi oblasti: dis. ... kand. geogr. nauk* [Ecological and economic balance and sustainable development of the Rostov region]. Rostov-on-Don, 2006, 243 p.

УДК 551.324

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-71-76

СЕЗОННЫЙ ХОД КОНЦЕНТРАЦИИ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ В ТВЕРДЫХ ОСАДКАХ НА ЮЖНОМ СКЛОНЕ ЭЛЬБРУСА (ЛЕДНИК ГАРАБАШИ)

© 2019 г. А.М. Керимов¹, Н.В. Татаренко², О.О. Дахова², Б.М. Хучунаев¹, Г.В. Куповых³

¹Высокогорный геофизический институт, Нальчик, Россия,

²Кабардино-Балкарский университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия,

³Южный федеральный университет, Таганрог, Россия

SEASONAL COURSE OF CONCENTRATION OF HEAVY METALS IN SOLID SEDIMENTS ON THE SOUTHERN SLOPE OF ELBRUS (GARABASHI GLACIER)

A.M. Kerimov¹, N.V. Tatarenko², O.O. Dakhova², B.M. Khuchunaev¹, G.V. Kupovykh³

¹High-Mountain Geophysical Institute, Nalchik, Russia,

²Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia,

³Southern Federal University, Taganrog, Russia

Керимов Абдулах Мухаметович – кандидат географических наук, ведущий научный сотрудник, отдел стихийных явлений, Высокогорный геофизический институт, пр. Ленина, 2, г. Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, 360030, Россия, e-mail: kerimov.a.m@mail.ru

Abdullakh M. Kerimov - Candidate of Geography, Leading Researcher, Department of Natural Phenomena, High-Mountain Geophysical Institute, Lenina Ave., 2, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, 360030, Russia, e-mail: kerimov.a.m@mail.ru

Татаренко Николай Викторович – старший преподаватель, кафедра биологии, геоэкологии и молекулярно-генетических основ живых систем, Институт химии и биологии, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, ул. Чернышевского, 173, г. Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, 360004, Россия, e-mail: tatarenko.nic@yandex.ru

Nikolay V. Tatarenko - Senior Lecturer, Department of Biology, Geoecology and Molecular Genetic Foundations of Living Systems, Institute of Chemistry and Biology, Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Chernyshevskogo St., 173, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, 360004, Russia, e-mail: tatarenko.nic@yandex.ru

Дахова Оксана Олеговна – кандидат географических наук, доцент, кафедра географии, Институт химии и биологии, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, ул. Чернышевского, 173, г. Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, 360004, Россия, e-mail: dakhva@rambler.ru

Oksana O. Dakhova - Candidate of Geography, Associate Professor, Department of Geography, Institute of Chemistry and Biology, Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Chernyshevskogo St., 173, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, 360004, Russia, e-mail: dakhva@rambler.ru

Хучунаев Бузигит Муссаевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией микрофизики облаков, Высокогорный геофизический институт, пр. Ленина, 2, г. Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, 360030, Россия, e-mail: buzigit@mail.ru

Buzigit M. Khuchunaev - Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Head of the Department of Clouds Physics, High-Mountain Geophysical Institute, Lenina Ave., 2, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, 360030, Russia, e-mail: buzigit@mail.ru

Куповых Геннадий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Институт компьютерных технологий и информационной безопасности, Южный федеральный университет, пер. Некрасовский, 44, г. Таганрог, 347928, Россия, e-mail: kupovykh@sfsu.ru

Gennady V. Kupovykh - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Institute of Computer Technology and Information Security, Southern Federal University, Nekrasovsky Lane, 44, Taganrog, 347928, Russia, e-mail: kupovykh@sfsu.ru

Рассмотрены особенности распределения тяжелых металлов в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаши) на уровне 3945 м за период с 2006 по 2008 г. к моменту максимального снегонакопления и к концу периода абляции. Приводится сезонный ход концентрации приоритетных загрязнителей: Cr, Ni, Mn, Pb и Zn. Анализируются основные источники их поступления, формирующие химический состав атмосферного аэрозоля. Установлено, что концентрации представленных микроэлементов в годовых слоях снежно-фирновой толщи имеют ярко выраженный сезонный ход. Максимум концентрации микроэлементов за рассматриваемый период наблюдается в летних пробах (конец периода абляции, сентябрь), а минимум – в зимне-весенних пробах (июнь, момент максимального снегонакопления). Максимум концентрации металлов Ni (1,25), Mn (11,62), Pb (5,57), Zn (65,08 мкг/л) в ледниковых отложениях за исследуемый период был отмечен в сентябре 2007 г., за исключением содержания Cr (5,53 мкг/л), максимум которого был отмечен в июне 2006 г. В ходе исследования установлено, что содержание тяжелых металлов в твердых осадках в районе исследования на 1–2 порядка ниже их ПДК.

Ключевые слова: тяжелые металлы, снежный покров, ледники, твердые осадки, микрочастицы, химический состав, ледник Гарабаши.

The article discusses the features of the distribution of heavy metals in the snow-firn mass on the southern slope of Elbrus (the Garabashi Glacier) at the height 3945 m for the period from 2006 to 2008 (maximum snow accumulation and by the end of the ablation period). The seasonal course of concentration of priority pollutants is given Cr, Ni, Mn, Pb and Zn. The main sources of their income are analyzed, due to forming the chemical composition of atmospheric aerosol. It was found that the concentrations of trace elements in the annual layers of snow-firn strata have a strongly marked seasonal course. The distribution maximum concentration of trace elements in summer (end of the ablation period, September), and the minimum concentration is observed in winter-spring samples (June, maximum snow accumulation). The maximum concentration of metals: Ni (1.25), Mn (11.62), Pb (5.57), Zn (65.08 mcg / l) in glacial deposits during the study period was observed in September, 2007. The exception is the concentration of Cr (5.53 mcg / l), the maximum of which was observed in June, 2006. The study found that the content of heavy metals in solid sediments in the study area is 1-2 orders of magnitude lower than their MAC.

Keywords: heavy metals, snow cover, glaciers, solid precipitation, microparticles, chemical composition, Garabashi Glacier.

Введение

Изучение формирования химического состава высокогорных ледников открывает существенные возможности в изучении загрязнения атмосферы. Механизм формирования химического состава ледников определяется взаимодействием различных факторов.

Во-первых, поступление химических примесей на ледник (естественные и антропогенные аэрозоли в атмосфере, перенос, выпадение с осадками и сухое их осаждение). Во-вторых, процесс метаморфизма снежного покрова, его переход в фирн и лёд, процессы таяния и замерзания, инфильтрация талой воды, испарение снежного покрова и конденсация водяного пара. Особую роль играют региональные факторы: горно-долинная циркуляция, местные ветры, подстилающая поверхность, склоновые процессы (лавины, камнепады, обвалы, ледопады), которые также вносят существенный вклад в формирование химического состава ледников. В-третьих, химический состав ледников изменяется как в пространстве, так и во времени [1].

Химические примеси, попавшие на ледник, характеризуют первичное загрязнение атмосферы, а

снежно-фирновая толща не только отражает современное состояние природной среды и атмосферы, но и несет в себе следы условий прошлого, в период которого она сформировалась.

С 1980 г. и по настоящее время нами проводятся систематические геохимические наблюдения на эталонном леднике – Гарабаши (южный склон Эльбруса) [1–10].

Вулканический массив горы Эльбрус расположен на Центральном Кавказе, на Боковом хребте. Именно здесь находится высочайшая вершина мегантиклинория Большого Кавказа, в пределах которого сосредоточен один из самых мощных узлов горного оледенения. Ледники конической вершины Эльбруса расположены на наветренных склонах, они свободно открыты для проникновения западных воздушных масс с Атлантики, являющихся их основным источником питания в виде твердых осадков. Ледники конических вершин практически лишены скального обрамления, которое загрязняет отложения за счет литологической основы подстилающей поверхности, усиливающей процессы абляции. Значительный перепад высот (около 3500 м от дна долины до вершины Эльбруса) позволяет изучать процессы самоочищения атмосферы от

примесей и механизм формирования химического состава снежно-фирновой толщи [1, 2].

Особый интерес представляет изучение химического состава твердых осадков на высоте 4000 м и выше, что соответствует средней атмосфере и фоновым концентрациям. Геохимический анализ ледниковых высотных зон Эльбруса позволяет выявить не только региональную, но и глобальную составляющую загрязнения атмосферы.

По своим структурно-стратиграфическим характеристикам снежно-фирно-ледяная толща на южном склоне Эльбруса на высоте 4000 м над уровнем моря и выше к моменту максимального снегонакопления (к концу июня) в меньшей степени подвержена процессам таяния.

Химические примеси, выпадающие из атмосферы вместе с твердыми осадками, за счет сухого осаждения поступают на ледник. Далее они, как правило, не выносятся в глубокие слои ледника, а концентрируются в пределах одного годового слоя.

Таким образом, анализ геохимических особенностей ледниковых отложений в зоне аккумуляции высокогорных ледников позволяет провести химическую стратификацию в отношении основных ионов, а также выявить степень антропогенного загрязнения тяжелыми металлами (ТМ).

Проведенные нами в работе [3] исследования по изучению химического состава микрочастиц в пробах свежеснежного снега на южном склоне Эльбруса по вертикальному профилю позволили выявить изменения концентрации примесей с абсолютной высотой.

В работе [4] авторами представлены результаты анализа проб сезонного снежного покрова и концентрации ТМ (Cr, Ni, Mn, Pb) на леднике Гарабаши на уровне 4000 м и приводятся концентрации ТМ (Cr, Ni, Mn, Pb, Zn, V) с седловины и восточной вершины г. Эльбрус. Рассмотрены максимальные и средние значения микроэлементов (Ag, Kd, V, Sn, Ni, Cr, Pb, Mn) на леднике Уллукол на высоте 4600 м н.у.м.

По данным авторов [5] изучены состояние и качество природных вод бассейна р. Баксан, проведен статистический анализ анионной и катионной составляющих химического состава проб речных вод за 2002, 2003, 2007 гг.

Авторами в работе [6] изучена взаимосвязь концентрации ТМ по структурно-стратиграфическим характеристикам снежно-фирновой толщи с мощными снегопадами, прошедшими в Приэль-

брусье, на южном склоне Эльбруса за период аккумуляции 2005–2006 и 2006–2007 гг. В работе [7] проведен микроструктурный анализ и рассмотрен пространственно-временной ход микрочастиц ледниковых отложений на примере ледников Адырсу (3800 м) и Уллукол (4600 м). Определена счетная, весовая концентрация и среднеквадратический диаметр микрочастиц в сезонных слоях.

По данным авторов [8, 9] изучены параметры функции распределения концентрации ТМ водонерастворимых частиц в твердых осадках. Определены экспериментальные и вычисленные значения аэрозольных частиц, вымытых снегом в условиях высокогорья Приэльбрусья.

Авторами в работах [11, 12] изучена динамика химического состава снежно-фирновой толщи Эльбруса за последние 75 лет. В работе [13] автор приводит сравнительный анализ кернов ледников Эльбруса и Казбека.

Материалы и методы исследования

Для оценки уровня загрязненности снежного покрова и ледниковых отложений на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаши) спектральным методом определялись следующие микроэлементы: Cr, Ni, Mn, Pb, Zn. Выбор этих микроэлементов объясняется тем, что они слабо растворяются в воде и менее подвержены миграции. Указанные микроэлементы относятся к наиболее опасным загрязнителям природной среды.

Результаты и их обсуждение

В ходе исследований изучено содержание ТМ в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаши) на уровне 3945 м н.у.м. и рассмотрен сезонный ход их концентрации, представленный в таблице за период 2006–2008 гг.

Сезонный ход концентрации ТМ на южном склоне Эльбруса, мкг/л / Seasonal course of heavy metals concentration on the southern slope of Elbrus, mcg / l

Месяц и год	Cr	Ni	Mn	Pb	Zn
Июнь 2006	5,53	0,50	5,22	0,36	7,67
Сентябрь 2006	0,66	0,54	4,49	4,11	–
Июнь 2007	2,02	0,62	6,62	0,45	–
Сентябрь 2007	1,97	1,25	11,62	5,57	65,08
Июнь 2008	1,56	0,45	1,61	0,49	2,54
Сентябрь 2008	063	058	4,78	1,66	6,35

Анализ данных таблицы свидетельствует, что концентрации ТМ в снежно-фирновой толще крайне неравномерны.

Содержание ТМ в снежно-фирновой толще изучалось к моменту максимального снегонакопления (июнь) и к концу периода абляции (сентябрь). В ходе исследований было установлено, что за рассматриваемый период в твердых осадках оно меняется в пределах 1–2 порядков.

Максимальные концентрации ТМ в снежно-фирновой толще за период 2006–2008 гг. были отмечены в сентябре 2007 г. Исключение составляет Cr, максимум концентрации которого наблюдался в июне 2006 г. (рис. 1).

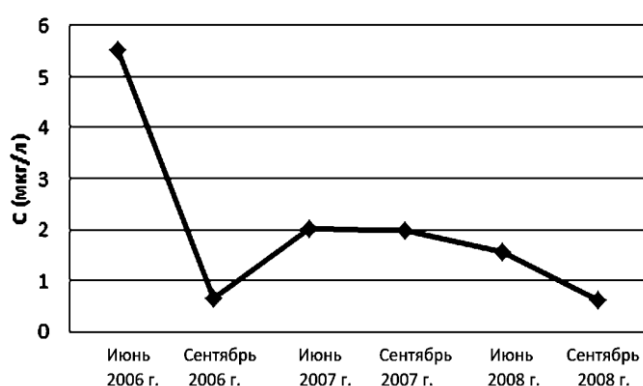


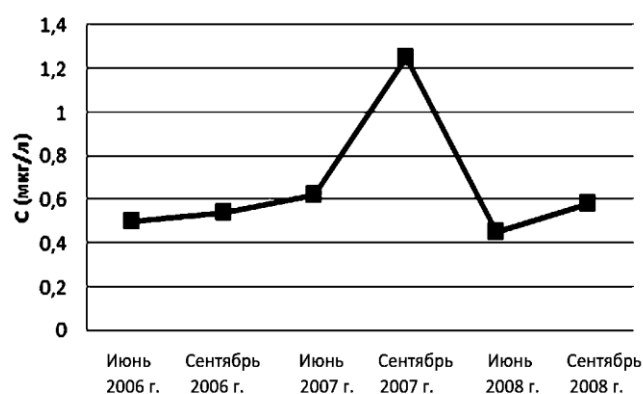
Рис. 1. Сезонный ход концентрации Cr в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаша)
/ Fig. 1. Seasonal course of Cr concentration in the snow-ice thickness on the southern slope of Elbrus (Garabashi glacier)

Содержание рассматриваемых ТМ менялось в следующих пределах: Cr (0,63–5,53), Ni (0,45–1,25), Mn (1,61–11,62), Pb (0,36–5,57) Zn (2,54–65,08) мкг/л.

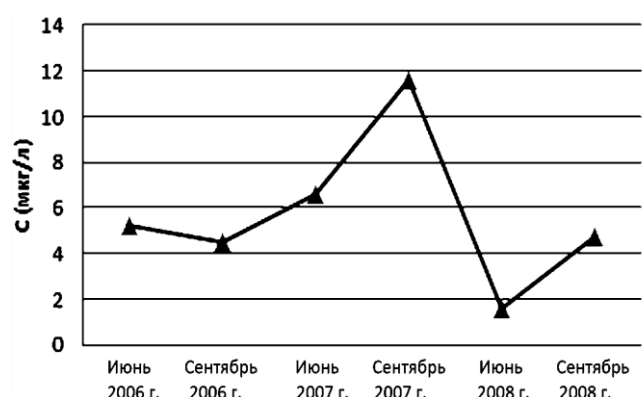
На поступление Cr в снежно-фирновую толщу влияют как естественные, так и антропогенные факторы. Естественные источники Cr связаны с литогенной основой, а техногенная эмиссия обусловлена производством феррохрома, никеля, нержавеющей стали, красителей и черной металлургией [1].

Сезонный ход концентрации ТМ в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаша) за период 2006–2008 гг. на уровне 3945 м н.у.м. представлен на рис. 2. Максимум концентрации ТМ наблюдался в июне 2007 г.: Ni (1,25), Mn (11,62), Pb (5,57), Zn (65,08) мкг/л.

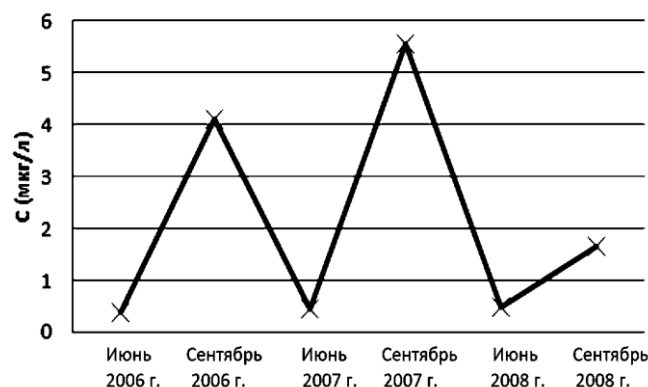
Наибольшее значение концентрации Zn в годовых слоях снежно-фирновой толщи среди рассмотренных элементов объясняется, вероятно, его естественной природой, связанной с вулканической деятельностью и выходами фумарол.



a/a



б / б



в / с

Рис. 2. Сезонный ход концентрации ТМ в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаша): а – Ni; б – Mn; в – Pb

/ Fig. 2. Seasonal course of heavy metals concentration in the snow-ice thickness on the southern slope of Elbrus (Garabashi glacier): a - Ni; b - Mn; c - Pb

Техногенная эмиссия Ni, как правило, в два раза превышает природную эмиссию. Антропогенный источник поступления Ni связан с автотранспортом, добычей сульфидных, силикатных и никелевых руд [1].

Концентрации микроэлементов в годовых слоях снежно-фирновой толщи имеют выраженный сезонный ход. Наиболее четко прослеживается изменение концентрации Mn и Pb. Установлено, что максимальные значения Mn и Pb отмечаются в летних горизонтах снежно-фирновой толщи. Природа поступления Mn в ледниковые отложения, как правило, связана с литогенетической основой подстилающей поверхности рельефа. Антропогенный источник поступления Pb связан с выбросами газов от автотранспорта, а естественный обусловлен вулканической деятельностью [1].

Выводы

В ходе проведенных исследований получены следующие основные результаты:

1. Концентрации микроэлементов (Cr, Ni, Mn, Pb, Zn) в годовых слоях снежно-фирной толщи на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаши) 3945 м н.у.м. за период 2006–2008 гг. имеют четко выраженный сезонный ход.

2. Максимум концентрации ТМ в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса за 2006–2008 гг. наблюдался в сентябре 2007 г. Максимальные содержания ТМ составили соответственно: Ni (1,25), Mn (11,62), Pb (5,57), Zn (65,08) мкг/л.

3. Дана оценка уровня загрязненности снежного покрова и ледниковых отложений. Анализ полученных экспериментальных данных позволяет сделать вывод о том, что сезонные концентрации ТМ (Cr, Ni, Mn, Pb, Zn) на 1–2 порядка меньше их разовой ПДК. Следовательно, ледники рассматриваемого района являются перспективными источниками пресной воды, удовлетворяющими требованиям санитарно-бытового назначения.

Литература

1. Шагин С.И., Татаренко Н.В., Машуков Х.В. Исследования источников формирования химического состава ледников и атмосферного аэрозоля в условиях высокогорья // Науч. изв. 2018. № 13. С. 111–115.
2. Татаренко Н.В., Керимов А.А., Керимов А.М. Концентрации тяжелых металлов в снежно-фирновой толще на леднике Гарабаши (южный склон Эльбруса) // Перспектива-2010 : материалы Междунар. науч. конф. Нальчик: КБГУ, 2010. Т.1. С. 355–361.
3. Татаренко Н.В., Гяургиев А.В. Высотное распределение концентраций микрочастиц в снежно-фирновой толще на южном склоне Эльбруса в интервале

высот 3700–5450 м н.у.м. // Изв. КБНЦ РАН. 2012. № 5 (49). С. 68–72.

4. Керимов А.М., Рототаева О.В., Татаренко Н.В. Геохимические исследования района оледенения Эльбруса // Природные процессы, геодинамика, сейсмоструктурная и современный вулканизм Северного Кавказа : материалы Всерос. науч. конф. Нальчик, 2008. С. 196–201.

5. Керимов А.М., Корчагина Е.А., Керимов А.А., Биногеров Б.Х., Пишихачева Д.Л., Татаренко Н.В., Багов А.М. Влияние на качество поверхностных вод рек Баксанской долины промышленно-хозяйственных объектов // Изв. КБНЦ РАН. 2007. № 4 (20), ч. I. С. 165–174.

6. Керимов А.М., Татаренко Н.В., Гяургиев А.В. Взаимосвязь концентрации тяжелых металлов и мощных снегопадов по данным сезонных слоев снежно-фирновой толщи на южном склоне Эльбруса на уровне 4000 м н.у.м. // Устойчивое развитие горных территорий. 2012. № 3 (13). С. 149–152.

7. Керимов А.М., Корчагина Е.А., Татаренко Н.В., Керимов А.А. Взаимосвязь микрочастиц снежно-фирновой толщи и речных вод Баксанской долины у их истоков // Изв. КБНЦ РАН. 2008. № 2 (22). С. 164–170.

8. Керимов А.М., Гаев Д.С., Керимов А.А., Корчагина Е.А., Татаренко Н.В. Природные ресурсы высокогорного региона (на примере Кабардино-Балкарской Республики) // Человеческое измерение в региональном развитии : докл. II Всерос. науч.-практ. конф. Нижневартовск, 2008. С. 10–12.

9. Керимов А.М., Татаренко Н.В., Татаренко З.М., Курашева О.А. Особенности поступления аэрозольных частиц в снежный покров путем вымывания и сухого осаждения в условиях высокогорья // Успехи современного естествознания. 2018. № 4. С. 121–126.

10. Керимов А.М., Рототаева О.В., Хмелевской И.Ф., Татаренко Н.В. Распределение тяжелых металлов в поверхностных слоях снежно-фирновой толщи на южном склоне Эльбруса // Гляциология от международного геофизического года до международного полярного года : материалы XIV гляциол. симп. Иркутск, 2008. С. 52–53.

11. Курузов С.С., Михаленко В.Н., Шахгеданова М., Жино П., Козачек А.В., Лаврентьев И.И., Кудерина Т.М., Попов Г.В. Пути дальнего переноса пыли на ледники Кавказа и химический состав снега на западном плато Эльбруса // Лед и снег. 2014. № 3 (127). С. 5–15.

12. Курузов С.С., Михаленко В.Н. Изменение концентрации микрочастиц и химического состава фирново-ледяной толщи Эльбруса за последние 75 лет по данным ледниковых кернов // Изменения климата и природной среды Северной Евразии: анализ, прогноз, адаптация : материалы Междунар. школы-конф. молодых ученых. М.: ГЕОС, 2014. С. 94–95.

13. Хайрединова А.Г., Курузов С.С., Жино П., Михаленко В.Н. Сравнительный анализ коротких кернов Казбека и Эльбруса для получения информации об

окружающей среде // Современные подходы к изучению экологических проблем в физической и социально-экономической географии : материалы X Междунар. молодёжн. школы-конф. Курск: 11-й ФОРМАТ, 2017. С. 110–121.

References

1. Shagin S.I., Tatarenko N.V., Mashukov Kh.V. *Isledovaniya istochnikov formirovaniya khimicheskogo sostava lednikov i atmosfernogo aerolya v usloviyakh vysokogor'ya* [Studies of sources of formation of the chemical composition of glaciers and atmospheric aerosol in the highlands]. *Nauch. izv.* 2018, No. 13, pp. 111-115.
2. Tatarenko N.V., Kerimov A.A., Kerimov A.M. [Concentrations of heavy metals in the snow-firn column on the Garabashi glacier (southern slope of Elbrus)]. *Perspektiva-2010* [Perspective 2010]. Proceedings of the International Science Conference. Nalchik: KBGU, 2010, vol. 1, pp. 355-361.
3. Tatarenko N.V., Gyaurgiev A.V. *Vysotnoe raspredelenie kontsentratsii mikrochastits v snezhno-firnovoi tolshche na yuzhnom sklone El'brusa v intervale vysot 3700–5450 m n.u.m.* [Altitudinal distribution of concentrations of microparticles in the snow-firn column on the southern slope of Elbrus in the range of heights 3700-5450 m n. a. m.]. *Izv. KBNTs RAN.* 2012, No. 5 (49), pp. 68-72.
4. Kerimov A.M., Rototaeva O.V., Tatarenko N.V. [Geochemical studies of the Elbrus glaciation area]. *Prirodnye protsessy, geodinamika, seismotektonika i sovremennyyi vulkanizm Severnogo Kavkaza* [Natural processes, geodynamics, seismotectonics and modern volcanism of the North Caucasus]. Proceedings of the All-Russian Scientific Conference. Nalchik, 2008, pp. 196-201.
5. Kerimov A.M., Korchagina E.A., Kerimov A.A., Binogorov B.Kh., Pshikhacheva D.L., Tatarenko N.V., Bagov A.M. *Vliyanie na kachestvo poverkhnostnykh vod rek Baksanskoi doliny promyshlenno-khozyaistvennykh ob'ektov* [Influence on the quality of surface waters of the rivers of the Baksan valley of industrial and economic objects]. *Izv. KBNTs RAN.* 2007, No. 4 (20), ch. I, pp. 165-174.
6. Kerimov A.M., Tatarenko N.V., Gyaurgiev A.V. *Vzaimosvyaz' kontsentratsii tyazhelykh metallov i moshchnykh snegopadov po dannym sezonnykh sloev snezhno-firnovoi tolshchi na yuzhnom sklone El'brusa na urovne 4000 m n.u.m.* [Correlation of heavy metals concentration and heavy snowfall according to the data of seasonal layers of snow-firn thickness on the southern slope of Elbrus at the level of 4000 m above sea level]. *Ustoichivoe razvitie gornyykh territorii.* 2012, No. 3 (13), pp. 149-152.
7. Kerimov A.M., Korchagina E.A., Tatarenko N.V., Kerimov A.A. *Vzaimosvyaz' mikrochastits snezhno-firnovoi tolshchi i rechnykh vod Baksanskoi doliny u ikh istokov* [Interrelation of microparticles of snow-firn thickness and river waters of Baksan valley at their sources]. *Izv. KBNTs RAN.* 2008, No. 2 (22), pp. 164-170.
8. Kerimov A.M., Gaev D.S., Kerimov A.A., Korchagina E.A., Tatarenko N.V. [Natural resources of the highland region (on the example of the Kabardino-Balkar Republic)]. *Chelovecheskoe izmerenie v regional'nom razviti* [Human dimension in regional development]. Reports of II All-Russian Scientific-Practical Conference. Nizhnevartovsk, 2008, pp. 10-12.
9. Kerimov A.M., Tatarenko N.V., Tatarenko Z.M., Kurashova O.A. *Osobennosti postupleniya aerolya v snezhnyi pokrov putem vymyvaniya i sukhogo osazhdeniya v usloviyakh vysokogor'ya* [Features of receipt of aerosol particles in a snow cover by washing out and dry deposition in the conditions of high mountains]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya.* 2018, No. 4, pp. 121-126.
10. Kerimov A.M., Rototaeva O.V., Khmelevskoi I.F., Tatarenko N.V. [Distribution of heavy metals in the surface layers of snow-firn strata on the southern slope of Elbrus]. *Glyatsiologiya ot mezhdunarodnogo geofizicheskogo goda do mezhdunarodnogo polyarnogo goda* [Glaciology from the international geophysical year to the international polar year]. Proceedings of the XIV Glaciological Symposium. Irkutsk, 2008, pp. 52-53.
11. Kutuzov S.S., Mikhalevskiy V.N., Shakhgadanova M., Zhino P., Kozachek A.V., Lavrent'ev I.I., Kuderina T.M., Popov G.V. *Puti dal'nego perenosa pyli na ledniki Kavkaza i khimicheskii sostav snega na zapadnom plato El'brusa* [Ways of long-range dust transfer to the glaciers of the Caucasus and the chemical composition of snow on the Western plateau of Elbrus]. *Led i sneg.* 2014, No. 3 (127), pp. 5-15.
12. Kutuzov S.S., Mikhalevskiy V.N. [Changes in the concentration of microparticles and the chemical composition of the firn-ice strata of Elbrus over the past 75 years according to the data of glacial cores]. *Izmeneniya klimata i prirodnoi sredy Severnoi Evrazii: analiz, prognoz, adaptatsiya* [Climate change and the natural environment of Northern Eurasia]. Materials of the International School-Conference of Young Scientists. Moscow: GEOS, 2014, pp. 94-95.
13. Khairidinova A.G., Kutuzov S.S., Zhino P., Mikhalevskiy V.N. [Comparative analysis of short cores of Kazbek and Elbrus for obtaining information about the environment]. *Sovremennyye podkhody k izucheniyu ekologicheskikh problem v fizicheskoy i sotsial'no-ekonomicheskoy geografii* [Modern approaches to the study of environmental problems in physical and socio-economic geography]. Proceedings of the X International Youth School-Conference. Kursk: 11-i FOMAT, 2017, pp. 110-121.

УДК 551.435.36: 551.4.012

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-77-83

ИССЛЕДОВАНИЕ ОВРАЖНО-БАЛОЧНОЙ СЕТИ ЮЖНОГО БЕРЕГА ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ*

© 2019 г. С.А. Мисиров¹, Л.А. Беспалова², А.А. Магаева^{1,2}, Е.В. Беспалова²

¹Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия,

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

INVESTIGATION OF THE RAVINE-BEAM NETWORK OF THE SOUTHERN COAST OF THE TAGANROG BAY USING UNMANNED AERIAL VEHICLES

S.A. Misirov¹, L.A. Beshpalova², A.A. Magaeva^{1,2}, E.V. Beshpalova²

¹Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia,

²Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Мисиров Самир Айдынович – младший научный сотрудник, лаборатория информационных технологий и математического моделирования, Южный научный центр РАН, ул. Чехова, 41, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия, e-mail: sam.misirov@gmail.com.

Samir A. Misirov - Junior Researcher, Laboratory of Information Technologies and Mathematical Modeling, Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Chekhova St., 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: sam.misirov@gmail.com

Беспалова Людмила Александровна – доктор географических наук, профессор, кафедра океанологии, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: beshpalowaliudmila@yandex.ru

Luidmila A. Beshpalova - Doctor of Geography, Professor, Department of Oceanology, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: beshpalowaliudmila@yandex.ru

Магаева Анастасия Алексеевна – аспирант, кафедра океанологии, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, Ростов-на-Дону, 344090, Россия; младший научный сотрудник, лаборатория информационных технологий и математического моделирования, Южный научный центр РАН, ул. Чехова, 41, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия, e-mail: a.magaeva@mail.ru

Anastasia A. Magaeva - Postgraduate, Department of Oceanology, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Junior Researcher, Laboratory of Information Technologies and Mathematical Modeling, Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Chekhova St., 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: a.magaeva@mail.ru

Беспалова Елена Владимировна – кандидат географических наук, доцент, кафедра океанологии, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: elena.beshpal@yandex.ru

Elena V. Beshpalova - Candidate of Geography, Associate Professor, Department of Oceanology, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: elena.beshpal@yandex.ru

Рассмотрена методика определения морфологических и морфометрических характеристик овражно-балочной сети по данным, полученным с беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). В ходе работы были собраны и обработаны материалы экспедиционных исследований Южного федерального университета и Южного научного центра РАН, проводимых в 2016–2019 гг. Район полевых работ включал два участка южного берега Таганрогского залива в пределах Азовского района Ростовской области общей площадью 7,5 км². Длина участков составила около 15 км, а ширина ограничивалась водоохранной зоной, которая составляет 500 м.

Обработка и анализ производились в цифровой фотограмметрической системе Agisoft PhotoScan Professional и программном комплексе ArcGIS 10.2. Результатами обработки данных выступают цифровые модели местности (ЦММ), плотные облака точек, ортофотопланы и текстурированные 3D-модели, которые позволяют оценить

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-05-80082.

рельеф обширных территорий. Полученные материалы, а также морфологические и морфометрические данные использовались для расчетов индекса эрозионной расчлененности ($K_{\text{э}}$) по формуле отношения длины эрозионной сети (L) на площади (P). В результате построены картосхема густоты эрозионного расчленения на погонный километр, а также таблицы для каждого исследуемого участка. Анализ рассчитанных индексов говорит о средней расчлененности и напряженном экологическом состоянии всей исследуемой территории. Оценка эрозионной расчлененности на погонный километр позволила выделить девять участков из 19, которые имеют сильную расчлененность и чрезвычайное экологическое состояние, шесть участков со средней расчлененностью, один со слабой и два участка без расчленения.

Ключевые слова: эрозия, овраг, беспилотный летательный аппарат (БПЛА), цифровая модель рельефа, ортофотоплан.

The article considers the method of determining the morphological and morphometric characteristics of the ravine-beam network according to the data obtained from unmanned aerial vehicles (UAVs). In the course of work materials of field studies of the Southern Federal University and Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, held in 2016-2019 were collected and processed. District field work included two areas of the southern coast of the Taganrog Bay within the Azov District, Rostov Region, with a total area of 7.5 km². The length of the plots was about 15 km, and the width was limited to the water protection zone, which is 500 m.

Processing and analysis were carried out in the digital photogrammetric system Agisoft PhotoScan Professional and software package ArcGIS 10.2. The results of data processing are digital terrain models (DTM), dense point clouds, orthophotomaps, and textured 3D models that allow you to assess the terrain of vast areas. The obtained materials, as well as morphological and morphometric data were used to calculate the index of erosion dismemberment (K), according to the formula of the ratio of the length of the erosion network (L) to the area (P). As a result, a map diagram of the density of erosion dismemberment per linear kilometer, as well as tables for each area under study, was constructed. The analysis of the calculated indices indicates the average dismemberment and stress of the ecological state of the entire study area. The assessment of erosion dismemberment per linear kilometer allowed us to identify nine sites out of 19 that have a strong dismemberment and extreme environmental condition, six sites with medium dismemberment, one with weak and two sites without dismemberment.

Keywords: erosion, ravine, unmanned aerial vehicle (UAV), digital elevation model, orthophotomap.

Введение

Береговая зона Азовского моря поражена комплексом опасных экзогенных геологических процессов, таких как абразия, оползни, широкое развитие овражно-балочной сети.

Для Таганрогского залива характерны первичные овраги берегового типа [1].

Согласно Водному кодексу РФ, одним из видов обязательного мониторинга является оценка состояния дна и берегов водного объекта, а также состояния водоохранных зон (ВЗ) [2]. Это связано с тем, что интенсификация эрозионных процессов в ВЗ может привести к дестабилизации и усилению, проявлению склоновых процессов, потере сельскохозяйственных и урбанизированных территорий. Учитывая протяженность и особенности природных условий побережья Азовского моря, осуществление регулярных наблюдений (мониторинга) за состоянием и соблюдением режима использования его ВЗ традиционными методами наземных обследований крайне затруднительно. Появление компактных и доступных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), используемых для дистанционного зондирования, и возрастающее качество цифровых камер позволили решить эту проблему.

Материалы и методы

В качестве полигона для мониторинга эрозионных процессов было выбрано два участка южного побережья Таганрогского залива в пределах Ростовской области. В геологическом отношении территория представляет собой абразионно-оползневый тип берега, который относительно приподнят и сложен неогеновыми песчано-глинистыми отложениями [1].

Исследуемый район характеризуется высокой степенью эрозионной расчлененности, так как большую часть занимают пахотные земли, где нередко видны нарушения использования земель в пределах ВЗ и прибрежных защитных полос (рис. 1).

В ходе полевых работ была исследована территория площадью 7,5 км². Длина участка составила около 15 км, а ширина ограничивалась ВЗ, которая составляет 500 м [2].

Полигон № 1 – от с. Займо-Обрыв Азовского района Ростовской области до с. Круглого Азовского района Ростовской области, протяженностью 8,5 км.

Полигон № 2 – от с. Круглого до с. Стефанидов Азовского района Ростовской области, протяженностью 10,9 км (рис. 2, 3).

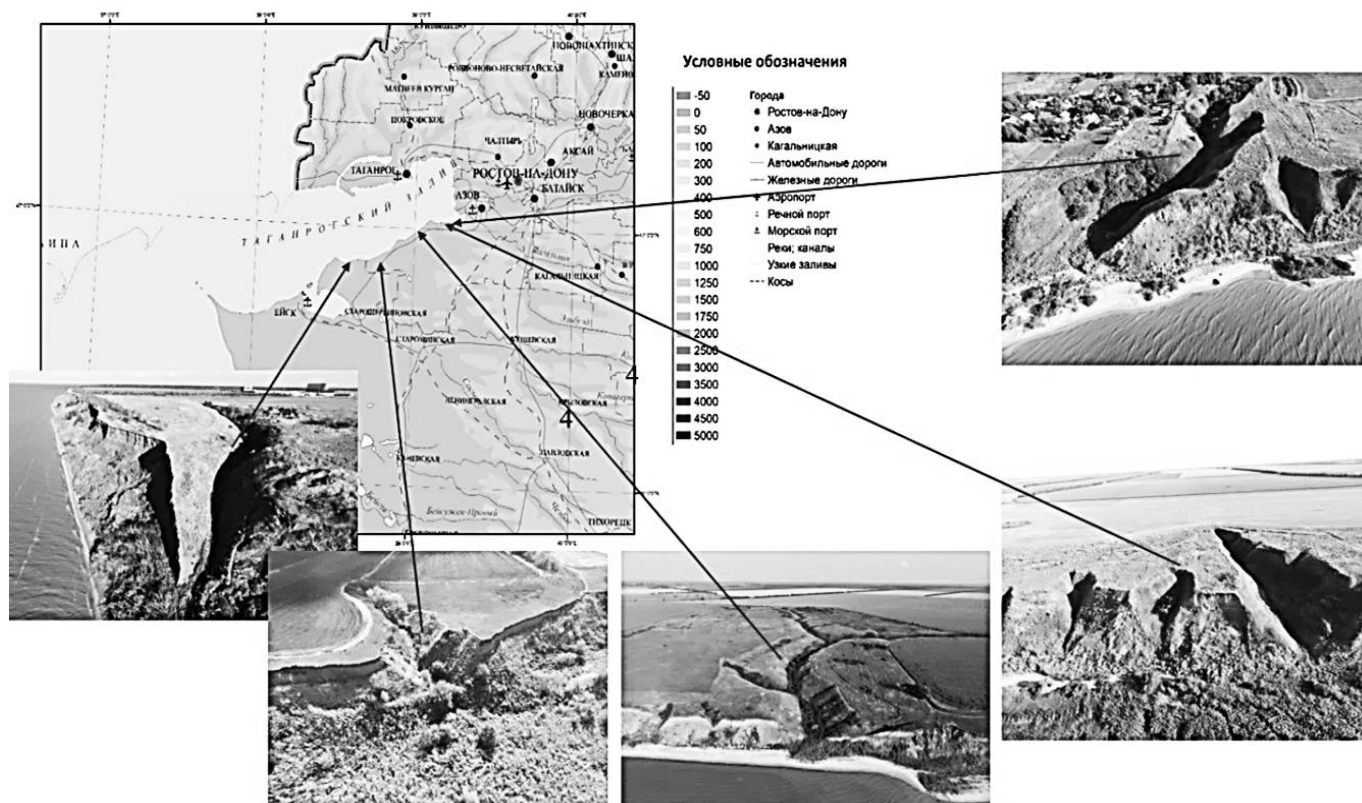


Рис. 1. Эрозионное расчленение южного берега Таганрогского залива
/ Fig. 1. Erosion dismemberment of the southern coast of the Taganrog Bay

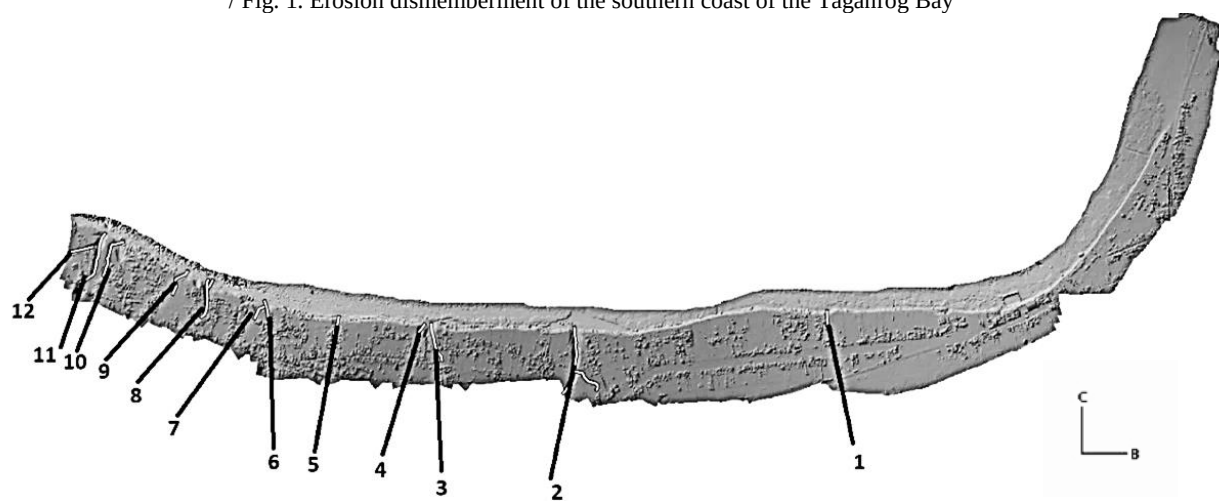


Рис. 2. Расположение оврагов полигона 1 / Fig. 2. Location of polygon 1 ravines

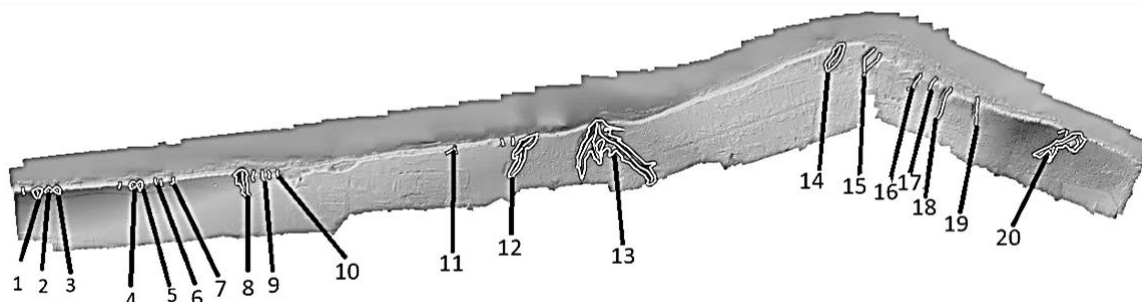


Рис. 3. Расположение оврагов полигона 2 / Fig. 3. Location of polygon 2 ravines

На первом этапе были проведены полевые исследования с применением сверхлегкого БПЛА типа мультикоптер Phantom 3 Professional производства компании DJI (Китай) с установленной, стабилизированной по трём осям камерой. В результате были получены фотоматериалы и контрольные точки для последующей обработки в цифровой фотограмметрической системе (ЦФС) PhotoScan компании Agisoft.

При фотосъёмке берега объектив камеры был направлен в нади́р (вертикально вниз) на высоте 200 м, в автоматическом режиме, с поперечным и продольным перекрытиями снимков 65 и 75 % соответственно [3].

Далее производилась обработка материалов, которая состояла из нескольких этапов:

1. Анализ и отбраковка снимков для исключения некачественных фото.
2. Загрузка качественных снимков в цифровую фотограмметрическую систему PhotoScan.
3. Создание разреженного облака точек. ЦФС PhotoScan находит общие точки фотографий и по ним определяет все параметры камер: положение, ориентацию, внутреннюю геометрию (фокусное расстояние, параметры дисторсии и т.п.). В результате получены разреженное облако общих точек в 3D-пространстве модели и данные о положении и ориентации камер [4].
4. Построение плотного облака точек на основе карт глубины с использованием алгоритма Semi-Global Matching [5].

5. Построение карты высот в виде растрового представления данных – GRID-модели, каждая ячейка (пиксель) которой имеет 3 координаты: x – широта; y – долгота; z – высота. Для построения карты высот также применяется интерполяция Natural Neighbor – «метод естественной окрестности» [6].

6. Создание ортофотоплана. Снимки с камеры беспилотника получены в центральной проекции. Это значит, что связка проектирующих лучей не перпендикулярна фотоснимку, а идёт под углом. Из-за этого возникают искажения. Для их устранения снимки необходимо ортотрансформировать, т.е. перейти из центральной проекции в ортогональную.

Для определения морфологических и морфометрических характеристик оврагов использовались стандартные инструменты ЦФС PhotoScan: «полигон», «ломаная линия», «профиль» (рис. 4).

При помощи профилей определялись морфологические и морфометрические характеристики:

значение площади и периметра, ширина днища в устье, середине и верховье, длина по тальвегу, уклоны бортов (рис. 4).

После того как были получены морфометрические данные для расчета индекса эрозионной расчлененности территории ($K_{эр}$) на погонный километр, цифровые модели местности (ЦММ) экспортировались в программный комплекс ArcGIS 10.2. Далее при помощи инструмента FishNet строилась градусная сетка с шагом 1 км [7]. Таким образом на каждом полигоне получились ячейки 1 км длиной и 0,5 км шириной.

На основе полученных морфометрических характеристик рассчитывалась густота эрозионного расчленения (K), которая определялась по формуле $K=L/P$, где L – длина эрозионной сети на площади P [8].

Так как $K_{эр}$ будет рассчитан на погонный километр, то $P = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ км}^2$ – это площадь одного участка; $L = T_1 + T_2 + \dots$ (где T – длина тальвега оврага).

На следующем этапе проводилась оценка коэффициента эрозионной расчленённости территории на основе критериев, указанных в табл. 1.

Таблица 1

Оценка коэффициента эрозионной расчленённости территории / Assessment of the coefficient of erosion dismemberment of the territory [8]

$K_{эр}$	Оценка
0	Нет расчленения
Менее 0,2	Слабая расчленённость, удовлетворительное экологическое состояние
0,2–0,7	Средняя расчленённость, напряжённое состояние
0,71–2,5	Сильная расчленённость, чрезвычайное экологическое состояние
Более 2,5	Сильная расчленённость, экологическое бедствие

Результаты и обсуждение

На основе полученных индексов эрозионной расчлененности исследуемой территории была построена картосхема степени эрозионного расчленения для двух полигонов (табл. 1, рис. 4).

Средний индекс по всей площади полигонов показывает, что в пределах исследуемых участков преобладают средняя расчлененность и напряжённое экологическое состояние (табл. 2).

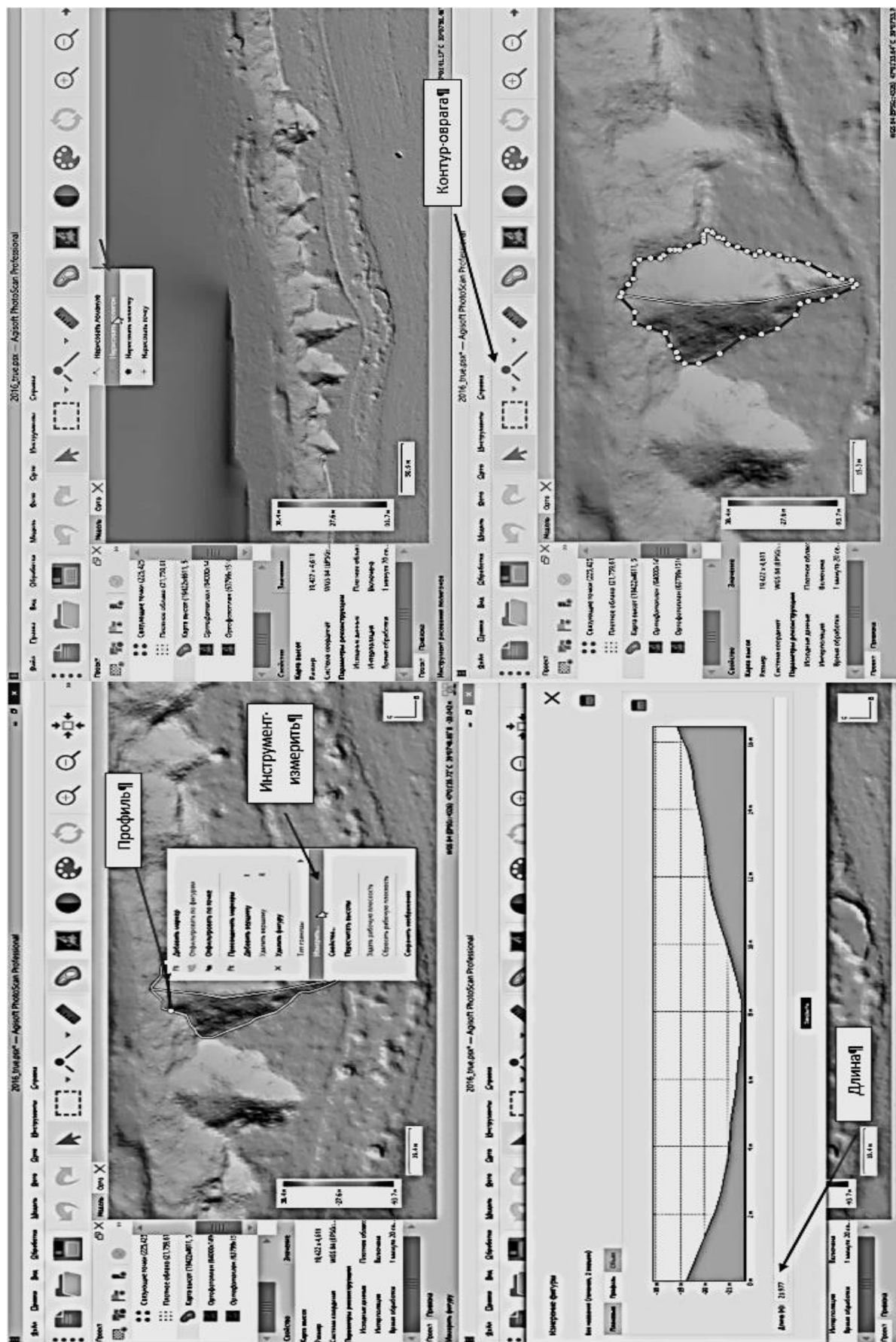


Рис. 4. Изучение морфологических и морфометрических характеристик оврагов при помощи стандартных инструментов / Fig. 4. Study of the morphological and morphometric characteristics of ravines using standard tools

Оценка эрозионной расчлененности на погонный километр позволила выделить восемь участков из 19, которые имеют сильную расчлененность и чрезвычайное экологическое состояние, шесть участков со средней расчлененностью, один со слабой и два участка без расчленения (рис. 5).

Одной из причин такого высокого уровня эрозионной расчлененности является то, что, несмотря на имеющиеся населенные пункты, район является зоной сельскохозяйственного назначения территорий

(специализация – возделывание зерновых культур, одна из шести основных природно-сельскохозяйственных зон Ростовской области) с жилой и общественной застройкой сельских населенных пунктов. К остальным причинам можно отнести:

- зафиксированные в ходе экспедиционных работ нарушения режима использования земель в ВЗ, например распашка под обрыв;
- отсутствие противоэрозионных приовражных лесных полос.

Таблица 2

Средний индекс эрозионной расчлененности территории для двух полигонов
/ The average index of erosion dismemberment of the territory for two polygons

№ полигона	Количество оврагов	Сумма длин тальвегов, км	Площадь полигона, км ²	Индекс эр.р. по полигонам	Степень эрозионной расчлененности
1	12	2,592	4,25	0,609882353	Средняя расчленённость, напряжённое состояние
2	35	4,32	5,45	0,79266055	Средняя расчленённость, напряжённое состояние



Рис. 5. Степень эрозионной расчлененности для полигонов 1 и 2 на погонный километр
/ Fig. 5. The degree of erosion dismemberment for polygons 1 and 2 per linear kilometer

Заключение

Проведенные исследования показали, что на основе конечных продуктов обработки данных, полученных с БПЛА, таких как ЦМР/ЦММ, ортофотоплан, 3D-модель, можно проводить детальные морфологические и морфометрические исследования. Такие данные могут служить в качестве дополнения к уже имеющимся инструментальным съемкам.

Сравнение разновременных данных позволяет оценить направление и скорость движения эрозии и предложить меры по предотвращению развития процессов оврагообразования.

Литература

1. Мамыкина В.А., Хрусталева Ю.П. Береговая зона Азовского моря. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1980. 176 с.
2. Водный кодекс Российской Федерации от 03.06.2006 № 74-ФЗ (ред. от 02.08.2019). URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_60683/4c65ff0f232195d8dccc08535d2c3923d5b67f1c/ (дата обращения: 10.11.2019).
3. Мисиров С.А., Беспалова Л.А. Опыт использования беспилотных летательных аппаратов для изучения типов и морфометрических характеристик южного берега Таганрогского залива // Моря России: фундаментальные и прикладные исследования : тез. докл. Севастополь: ФИЦ МГИ, 2019. С. 363–364.
4. Руководство пользователя Agisoft PhotoScan: Professional Edition, версия 1.2. URL: http://www.agisoft.com/pdf/photoscan-pro_1_2_ru.pdf (дата обращения: 10.09.2018).
5. Hirschmuller H. Accurate and efficient stereo processing by semiglobal matching and mutual information // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. 2005. Vol. 2. P. 807–814.
6. Sibson R. A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation // Interpolating Multivariate Data. New York: John Wiley & Sons, 1981. P. 21–36.

7. Справочник по инструментам ArcGIS PRO. URL: <https://pro.arcgis.com/ru/pro-app/tool-reference/data-management/create-fishnet.htm> (дата обращения: 10.10.2019).

8. Спиридонов А.И. Геоморфологическое картографирование. М.: Недра, 1974. 184 с.

References

1. Mamykina V.A., Khrustalev Yu.P. *Beregovaya zona Azovskogo morya* [Coastal zone of the sea of Azov]. Rostov-on-Don: Izd-vo RGU, 1980, 176 p.
2. *Vodnyi kodeks Rossiiskoi Federatsii ot 03.06.2006 № 74-FZ (red. ot 02.08.2019)* [The Water Code of the Russian Federation of 03.06.2006 No. 74-FZ (as amended on 02.08.2019)]. Available at: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_60683/4c65ff0f232195d8dccc08535d2c3923d5b67f1c/ (accessed 10.11.2019).
3. Misirov S.A., Bespalova L.A. [The experience of using unmanned aerial vehicles to study the types and morphometric characteristics of the southern coast of the Taganrog Bay]. *Morya Rossii: fundamental'nye i prikladnye issledovaniya* [Seas of Russia: fundamental and applied research]. Abstracts. Sevastopol: FITs MGI, 2019, pp. 363–364.
4. *Rukovodstvo pol'zovatelya Agisoft PhotoScan: Professional Edition, versiya 1.2* [Agisoft PhotoScan user manual: Professional Edition, version 1.2]. Available at: http://www.agisoft.com/pdf/photoscan-pro_1_2_ru.pdf (accessed 10.09.2018).
5. Hirschmuller H. Accurate and efficient stereo processing by semiglobal matching and mutual information. *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2005, vol. 2, pp. 807–814.
6. Sibson R. A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation. *Interpolating Multivariate Data*. New York: John Wiley & Sons, 1981, pp. 21–36.
7. *Spravochnik po instrumentam ArcGIS PRO* [Reference tools in ArcGIS PRO]. Available at: <https://pro.arcgis.com/ru/pro-app/tool-reference/data-management/create-fishnet.htm> (accessed 10.10.2019).
8. Spiridonov A.I. *Geomorfologicheskoe kartografirovanie* [Geomorphological mapping]. Moscow: Nedra, 1974, 184 p.

УДК 551.583

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-84-90

ИЗМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ЗАСУШЛИВОЙ СТЕПИ*

О.В. Назаренко¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

VARIABILITY OF SOME METEOROLOGICAL PARAMETERS IN THE ARID STEPPE

O.V. Nazarenko¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Назаренко Олеся Владимировна – кандидат географических наук, доцент, кафедра физической географии, экологии и охраны природы, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: ovnazarenko@sfedu.ru

Olesya V. Nazarenko - Candidate of Geography, Associate Professor, Department of Physical Geography, Ecology and Environment Protection, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: ovnazarenko@sfedu.ru

Представлены результаты исследований тенденций изменчивости климата. Проведено изучение региональных проявлений изменения климата в условиях засушливой степи на примере метеостанции Гигант. Это важный сельскохозяйственный район, природа которого претерпела серьезные изменения.

Динамика изучалась на основе использования многолетней метеорологической информации за период с 1939 по 2016 г. Установлена устойчивая тенденция к потеплению при незначительном похолодании. Анализ изменения осадков не демонстрирует значимых изменений в режиме. Анализ отечественной литературы показывает, что общие тенденции изменения климата характерны и для данной метеостанции. Средняя температура воздуха повысилась на 1,2 °C. Анализ изменения осадков не показывает изменений в их режиме, за исключением значительного уменьшения количества осадков за 2004 – 2015 гг. Минимальное количество осадков составило 314,1 мм (2007), максимальное – 699,7 мм (2016). Нарастающая аридизация климата вызывает беспокойство не только в связи с ростом засух и пожаров, но и с изменением урожайности зерновых.

Ключевые слова: изменение климата, засушливая степь, аридизация, Ростовская область.

The results of studies of climate variability trends are presented. The study of regional manifestations of climate change in arid steppe on the example of the station Giant is given. This area is of particular interest agricultural area, and the nature of it has undergone major changes.

The dynamics was studied on the example of long-term meteorological information for the period 1939 to 2016. A steady trend towards warming was established. Analysis of precipitation changes does not show significant changes in the regime. The analysis of literature shows that the general trends of climate changes are typical for this weather station. The increase in average air temperature was 1.2 °C. The analysis of precipitation changes does not show changes in their regime. Exception is a significant decrease in precipitation for the period 2004-2015. The minimum rainfall was 314.1 mm (2007), maximum was 699.7 mm (2016). The increasing aridization of the climate causes concern not only due to the increase in droughts and fires, but also changes in grain yields. The world community is seriously concerned about the increasing number of natural disasters, enormous damage from droughts and fires, which are a consequence of the changes in the environment. This fact shows a clear trend of increased aridity of the territory, since the air temperature observed increase is not accompanied by a corresponding increase in precipitation.

Keywords: climate change, arid steppe, aridization, Rostov Region.

* Работа выполнена при поддержке гранта № ВнГр – 5.5795.2017/8.9.

Введение

Климатические изменения и их воздействие на окружающую среду являются актуальной проблемой настоящего времени, вызывая гидрологические изменения и смену экосистем. В результате формируются экосистемы, представляющие меньшую ценность в хозяйственном отношении, низкопродуктивные [1]. Поэтому анализ климатических изменений является важной и актуальной задачей. Глобальные изменения климата на юге европейской части проявились в потеплении зимнего периода и увеличении суммы осадков за холодный сезон [2–6]. Общие закономерности изменения метеорологических параметров связаны с равнинным характером местности, высоким приходом солнечной радиации и недостаточной влагообеспеченностью [3, 4].

Материалы и методы

Засушливая степь рассматривается на примере поселка Гигант Ростовской области. Он расположен на юге Ростовской области, основан в 1928 г. как первый в СССР зерновой совхоз, самый крупный в стране.

Анализ изменений метеорологических характеристик выполнен на основе работ [7, 8]. Были использованы суточные и средние месячные данные наблюдений за температурой воздуха и осадками, высотой снежного покрова, запасами воды в снеге по метеостанции Гигант за период с 1966 по 2018 г. из архива ВНИИГМИ-МЦД [7, 8]. Анализируется период с 1966 по 2017 г.

Результаты исследований

Анализ динамики температуры воздуха показывает, что наблюдаются значительное нарастание и увеличение амплитуды годовых значений

(рис. 1). Сравнение периодов 1939–1960 и 1966–2017 гг. показывает увеличение среднегодовой температуры на 1,2 °С (табл. 1).

Фиксируется устойчивый тренд повышения температуры воздуха [9–11]. Отмечается также уменьшение амплитуды колебания среднегодовой температуры воздуха. Исключения составили 2003 и 2011 гг., когда среднегодовая температура воздуха была ниже среднемноголетних значений [9]. Анализ позволил выявить аномальные по температуре года. Самым холодным был 1987 г. (7,89 °С), а самым теплым – 2007 г. (12,27 °С).

Годовой ход температуры воздуха четко выражен (рис. 2). Минимальные средние месячные температуры отмечаются зимой (в январе) и достигают –3,6 °С. К маю температура постепенно увеличивается. Наибольшая температура отмечается в июле-августе и составляет 23,3–24 °С. Далее идет постепенное снижение температуры.

Средние температуры января варьировали значительно – от –14,2 (1972) до 3,5 °С (2007). Период с 1971 по 1980 г. является самым холодным в данной выборке. Увеличение средней температуры января носит устойчивый характер и с 1939 по 2017 г. составило 2,6 °С (рис. 2). Средняя температура июля изменялась от 20,9 (1982, 1992) до 27,7 °С (2001). С 1971 г. наблюдается устойчивый рост средней температуры июля с 23,2 до 25,3 °С. Далее происходит постепенное снижение температуры. С 2007 по 2017 г. фиксировались температуры июля, значительно превышающие многолетние данные.

Атмосферные осадки являются основным источником питания рек, создают ресурсы поверхностного стока и почвенной влаги. Роль осадков возрастает во время зимних оттепелей, которые зависят от неустойчивости температуры зимой.

Неравномерность выпадения осадков в течение года характеризует период наблюдений 1966–2017 гг. (рис. 3).

Таблица 1

Среднемесячная температура воздуха и количество осадков по м/ст Гигант [9]
/ Average monthly air temperature and precipitation, MS Gigant

Срок наблюдений	Температура, °С			Осадки, мм		
	Год	Январь	Июль	Год	XI–III	IV–X
1939–1960	9,0	–5,5	23,5	450	153	297
1966–2017	10,2	–3,6	24,0	517,4	194,8	322,6
1966–1970	10,1	–4,2	24,1	454,6	229,4	225,2
1971–1980	9,6	–6,6	23,2	518,5	175,5	342,9
1981–1990	9,7	–2,6	23,2	527,7	197,2	330,5
1991–2000	10,0	–2,9	23,8	548,4	188,4	360,1
2001–2010	11,1	–2,7	25,0	528,8	206,7	322,1
2011–2017	11,1	–2,9	25,3	485,3	186,0	299,3

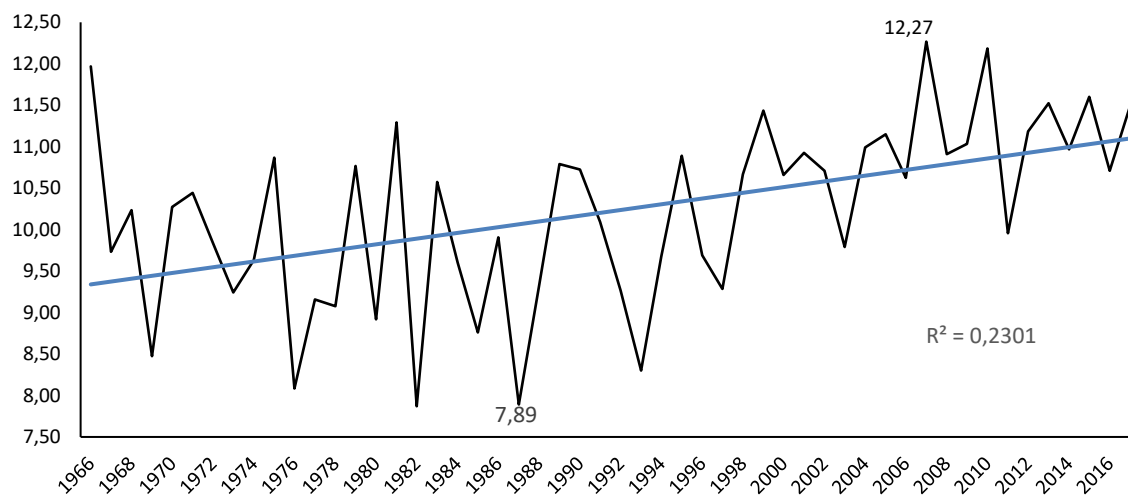


Рис. 1. Изменение температуры за период 1966–2016, м/ст Гигант
/ Fig.1. Dynamics of average annual air temperature 1966-2016, MS Gigant

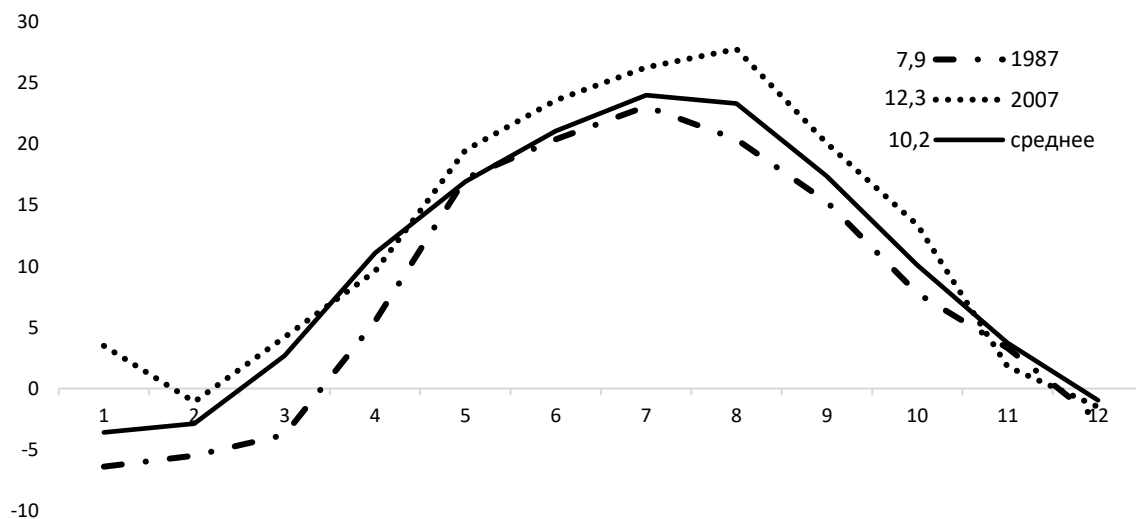


Рис. 2. Изменение температуры воздуха в течение года, м/ст Гигант (средние, 1987, 2007)
/ Fig. 2. Dynamics of air temperature, MS Gigant (average, 1987, 2007)

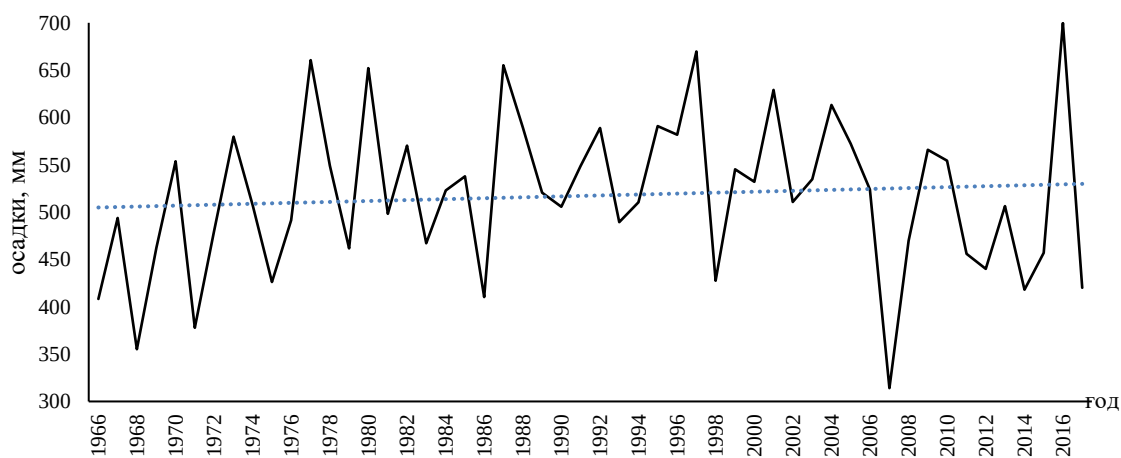


Рис. 3. Распределение сумм осадков по м/ст Гигант (1966–2017 гг.)
/ Fig. 3. Distribution of precipitation, MS Gigant (1966-2017)

Отмечается сложный характер колебания осадков, что характерно для большинства метеостанций на территории России начиная с 1960-х гг. Минимальное количество осадков было зафиксировано в 2007 г. и составило 314,1 мм, максимальное – 699,7 мм (2016 г.). Среднегодовая сумма осадков увеличивалась до 1997 г., после чего в 1998 г. отмечается падение на 242 мм. В последующие годы количество атмосферной влаги нарастало.

Для территории области характерен континентальный тип годового хода осадков с максимумом в летний период. Преобладают осадки, выпадающие в теплый период (IV–X). На территории м/ст Гигант за теплый период выпадает 322,6 мм, в холодный период – 194,8. На теплое время (апрель – октябрь) приходится 61,7 % выпадающих осадков, на холодное – 38,3. Однако отмечается неравномерность по годам. Например, период 1966–1979 гг. характеризуется практически равным распределением осадков в течение года, на лето приходится 49,5 % выпадающих осадков. В остальные исследуемые периоды основная масса осадков выпадает в летний период, и ее доля изменяется от 60,9 (2001–2010) до 66 % (1991–2000). Увлажнение теплового и холодного полугодий в 1939–1960 и 1966–2017 гг. различается всего на 4 %. Минимальная сумма

осадков в п. Гигант приходится на январь – март (рис. 4). Наибольшее среднее количество осадков отмечается в мае – июле, после чего следует спад. За период наблюдений с 1966 по 2017 г. самым сухим годом был 2007 г. (314,1 мм), а самым влажным – 2016 г. (699,7 мм).

Атмосферные осадки выпадают в твердом, жидком и смешанном виде. Преобладают жидкие осадки, они составляют за год 76–90 %. Отмечаются жидкие осадки весь год, включая зимние месяцы. Твердые осадки играют меньшую роль, их доля равна 7–18 %.

Снежный покров формируется при отрицательных температурах, обусловлен циклонической деятельностью и возникает в зоне фронтов. Преобладает снежный покров толщиной 1–10 см, редко – более 16 см и очень редко – более 30 см.

Самая низкая среднегодовая температура зафиксирована в 1987 г., этот год характеризуется наибольшей продолжительностью залегания снега (табл. 2). Средняя высота снежного покрова в этот год составила 14,52 см, он пролежал с января по апрель, последние случаи снега были зафиксированы в начале апреля. Самая большая высота снежного покрова зафиксирована в феврале (25,2 см), январе (18,9 см), марте (18,7 см), в декабре высота снежного покрова составила 6,1 см.

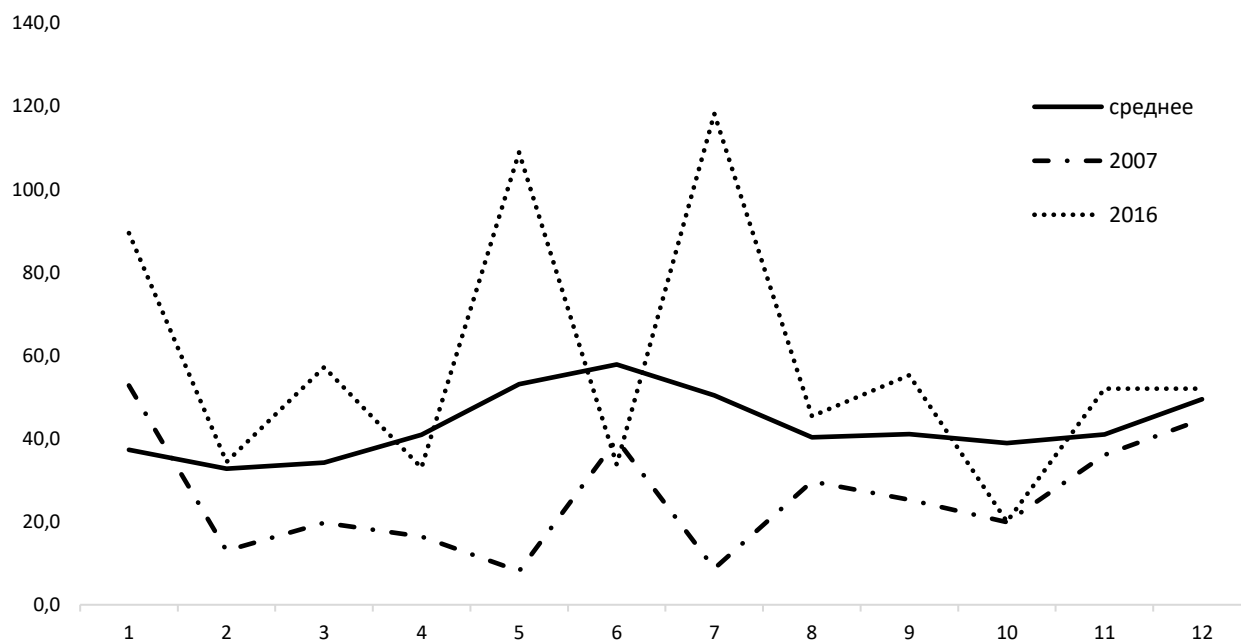


Рис. 4. Годовой ход осадков, мм, на м/ст Гигант / Fig. 4. Annual change of precipitation, mm, MS Gigant

Таблица 2

**Характеристика снегопадов по максимальному приросту снега
/ Characteristics of snowfalls on the maximum growth of snow**

Год	Высота снежного покрова, см							Средняя высота, см	Число дней со снегом
	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	>30		
1987	12	11	16	34	19	20	4	14,52	116
2007	20	7	0	0	0	0	0	3,1	27
2016	23	22	12	1	2	1	0	8,2	61

За 2007 г. было зафиксировано 27 дней со снежным покровом, средняя высота составила 3,1 см. Снегопады отмечались в январе (1,8 см, 5 дней), феврале (1,7 см, 10 дней) и декабре (4,9 см, 12 дней).

За 2016 г. зафиксирован 61 день со снежным покровом, из них по 25 дней – в январе и декабре, по 5 – в феврале и ноябре, 1 – в марте. Средняя высота снежного покрова составила 8,2 см.

Запасы воды в снеге оказывают влияние на величину половодья на реках. Запасы воды в снеге изменялись значительно за период наблюдений. В начале зимы отмечаются минимальные запасы воды в снеге, они составляют около 30 мм. К марту запасы влаги в почве увеличиваются и достигают в среднем 90 мм. За период с 1966 по

2018 г. отмечались резкие колебания запаса воды в снеге. Максимальные значения (1138 мм) приурочены к самому холодному году (1987), в этот год отмечается самый продолжительный период залегания снега, отрицательные температуры фиксировались и в первой декаде апреля. С 1999 г. наблюдается уменьшение запасов влаги в снежном покрове, только в 15 % случаев отмечается превышение среднего содержания воды (рис. 5).

Климат является динамически изменяющейся системой. Анализ участвовавших неблагоприятных явлений погоды показывает, что он совпадает с периодом небольшого количества осадков, что требует дополнительных дальнейших исследований.

1200

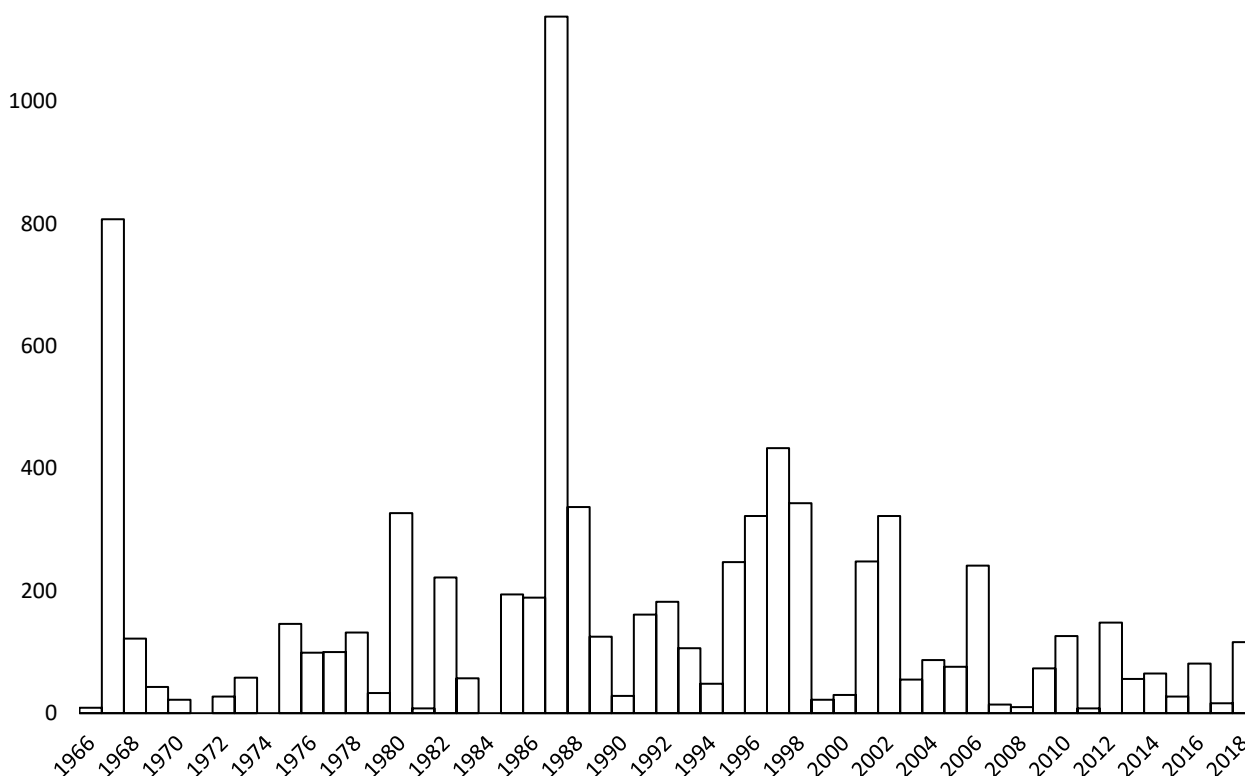


Рис. 5. Запасы воды в снежном покрове / Fig. 5. Water reserves in the snow cover

Заклучение

Таким образом, динамика климатических изменений в условиях засушливой степи изучалась на основе метеорологической информации по метеостанции Гигант (1939–1960, 1966–2017 гг.). Анализ отечественной литературы показывает, что общие тенденции изменения климата сохраняются для данной метеостанции. Территория является важным сельскохозяйственным районом, природа которого претерпела серьезные изменения. Установлена устойчивая тенденция к потеплению. Средняя температура воздуха увеличилась на 1,2 °С. Анализ изменения осадков не показывает изменений в их режиме, за исключением значительного уменьшения количества осадков за период 2004–2015 гг. Минимальное количество осадков составило 314,1 мм (2007), максимальное – 699,7 мм (2016). Нарастающая аридизация климата вызывает обеспокоенность не только в связи с ростом засух и пожаров, но и с изменением урожайности зерновых.

Литература

1. Кузьмина Ж.В. Анализ многолетних метеорологических трендов на юге России и Украины (от лесостепи до пустынь) // Аридные экосистемы. 2007. Т. 13, № 32. С. 47–60.
2. Дмитриева В.А., Маскайкина С.В. Изменчивость водного режима в верховье Донского бассейна в современный климатический период // Вестн. ВГУ. География. Геоэкология. 2013. № 1. С. 17–21.
3. Лурье П.М., Панов В.Д. Влияние изменений климата на гидрологический режим р. Дон в начале XXI столетия // Метеорология и гидрология. 1999. № 4. С. 90–97.
4. Панов В.Д., Лурье П.М., Ларионов Ю.А. Климат Ростовской области: вчера, сегодня, завтра. Ростов н/Д.: Донской издат. дом, 2006. 487 с.
5. Сухова М.Г., Журавлева О.В. Динамика изменения температуры воздуха и осадков в Чуйской котловине // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 1. С. 124–129.
6. Черенкова Е.А. Анализ особенностей обширных атмосферных засух на юге Европейской России // Аридные экосистемы. 2012. Т. 18, № 4 (53). С. 13–21.
7. Булыгина О.Н., Разуваев В.Н., Коршунова Н.Н., Швец Н.В. Описание массива данных месячных сумм осадков на станциях России. URL: <http://meteo.ru/data>

/158-total-precipitation#описание-массива-данных (дата обращения: 10.09.2019).

8. Булыгина О.Н., Разуваев В.Н., Трофименко Л.Т., Швец Н.В. Описание массива данных среднемесячной температуры воздуха на станциях России. URL: <http://meteo.ru/data/156-temperature#описание-массива-данных> (дата обращения: 01.05.2019).

9. Назаренко О.В. Динамика изменения температуры воздуха и осадков в бассейне реки Средний Егорлык // Глобальные климатические изменения: региональные эффекты, модели, прогнозы. Воронеж: Цифровая полиграфия, 2019. Т. 1. С. 235–239.

10. Назаренко О.В. К вопросу о влиянии климатических факторов на грунтовые воды Доно-Донецкого бассейна во второй половине XX столетия // Водные ресурсы. 2006. Т. 33, № 4. С. 504–510.

11. Назаренко О.В. Оценка региональных изменений метеорологических показателей и их влияния на уровень грунтовых вод (на примере г. Ростова-на-Дону) // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 5. 7 с.

References

1. Kuz'mina Zh.V. Analiz mnogoletnikh meteorologicheskikh trendov na yuge Rossii i Ukrainy (ot lesostepi do pustyn') [Analysis of long-term meteorological trends in the South of Russia and Ukraine (from forest-steppe to deserts)]. *Aridnye ekosistemy*. 2007, vol. 13, No. 32, pp. 47–60.
2. Dmitrieva V.A., Maskaikina S.V. Izmenchivost' vodnogo rezhima v verkhov'e Donskogo basseina v sovremennyi klimaticheskii period [Variability of the water regime in the Upper Don basin in the modern climatic period]. *Vestn. VGU. Geografiya. Geoekologiya*. 2013, No. 1, pp. 17–21.
3. Lur'e P.M., Panov V.D. Vliyanie izmenenii klimata na gidrologicheskii rezhim r. Don v nachale XXI stoletiya [The influence of climate change on the hydrological regime of the Don river at the beginning of the 21st century]. *Meteorologiya i gidrologiya*. 1999, No. 4, pp. 90–97.
4. Panov V.D., Lur'e P.M., Larionov Yu.A. *Klimat Rostovskoi oblasti: vchera, segodnya, zavtra* [Climate of the Rostov region: yesterday, today, tomorrow]. *Rostov-on-Don: Donskoi izdat. dom*, 2006, 487 p.
5. Sukhova M.G., Zhuravleva O.V. Dinamika izmeneniya temperatury vozdukha i osadkov v Chuiskoi kotlovine [Dynamics of changes in air temperature and precipitation in the Chui basin]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2017, No. 1, pp. 124–129.
6. Cherenkova E.A. Analiz osobennostei obshirnykh atmosferykh zasukh na yuge Evropeiskoi Rossii [Analysis of the features of extensive atmospheric droughts in the South of European Russia]. *Aridnye ekosistemy*. 2012, vol. 18, No. 4 (53), pp. 13–21.

7. Bulygina O.N., Razuvaev V.N., Korshunova N.N., Shvets N.V. *Opisanie massiva dannykh mesyachnykh summ osadkov na stantsiyakh Rossii* [Description of the data array of monthly precipitation amounts at Russian stations]. Available at: <http://meteo.ru/data/158-total-precipitation#opisanie-massiva-dannykh> (accessed 10.09.2019).

8. Bulygina O.N., Razuvaev V.N., Trofimenko L.T., Shvets N.V. *Opisanie massiva dannykh srednemesyachnoi temperatury vozdukha na stantsiyakh Rossii* [Description of the data array of the average monthly air temperature at the stations of Russia]. Available at: <http://meteo.ru/data/156-temperature#opisanie-massiva-dannykh> (accessed 01.05.2019).

9. Nazarenko O.V. [Dynamics of changes in air temperature and precipitation in the Middle Egorlyk river basin]. *Global'nye klimaticheskie izmeneniya: regional'nye*

effekty, modeli, prognozy [Global climate changes: regional effects, models, forecasts]. Voronezh: Tsifrovaya poligrafiya, 2019, vol. 1, pp. 235-239.

10. Nazarenko O.V. K voprosu o vliyaniy klimaticheskikh faktorov na gruntovye vody Dono-Donetskogo basseina vo vtoroi polovine KhKh stoletiya [On the influence of climatic factors on the groundwater of the Don-Donets basin in the second half of the 20th century]. *Vodnye resursy*. 2006, vol. 33, No. 4, pp. 504-510.

11. Nazarenko O.V. Otsenka regional'nykh izmenenii meteorologicheskikh pokazatelei i ikh vliyaniya na uroven' gruntovykh vod (na primere g. Rostova-na-Donu) [Assessment of regional changes in meteorological indicators and their impact on the groundwater level (on the example of Rostov-on-Don)]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*. 2013, No. 5, p. 7.

Поступила в редакцию / Received

15 августа 2019 г. / August 15, 2019

УДК 556, 627.8, 550.8.053

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-91-97

ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПЕДАНСА СУЛЬФАТНЫХ ПОДЗЕМНЫХ ВОД МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

© 2019 г. Т.Н. Нурмагомедов¹, К.П. Латышенко¹, Э.С. Сианисян²

¹Академия гражданской защиты МЧС России, Химки, Россия,

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

INVESTIGATION OF SULPHATE GROUNDWATER IMPEDANCE BY ELECTROCHEMICAL SPECTROSCOPY

T.N. Nurmagomedov¹, K.P. Latyshenko¹, E.S. Sianisyan²

¹Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia, Khimki, Russia,

²Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Нурмагомедов Тимур Низамудинович – преподаватель, кафедры механики и инженерной графики, Академия гражданской защиты МЧС России, мкр. Новогорск, 1, г. Химки, 141435, Россия, e-mail: nurmagomedov.timur@mail.ru

Timur N. Nurmagomedov - Lecturer, Department of Mechanics and Engineering Graphics, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia, Novogorsk, 1, Khimki, 141435, Russia, e-mail: nurmagomedov.timur@mail.ru

Латышенко Константин Павлович - доктор технических наук, профессор, кафедра механики и инженерной графики, Академия гражданской защиты МЧС России, мкр. Новогорск, 1, г. Химки, 141435, Россия, e-mail: kplat@mail.ru

Konstantin P. Latyshenko - Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Mechanics and Engineering Graphics, Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia, Novogorsk, 1, Khimki, 141435, Russia, e-mail: kplat@mail.ru

Сианисян Эдуард Саркисович – доктор геолого-минералогических наук, профессор, кафедра геологии нефти и газа, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: edward@sfsedu.ru

Eduard S. Sianisyan - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Department of Oil and Gas Geology, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: edward@sfsedu.ru

Исследованы электрофизические свойства сульфатных подземных вод методом электрохимической спектроскопии в целях обоснования оптимальных параметров технических средств контроля за растворением и выносом солей фильтрационными водами.

Быстроменяющиеся гидродинамические и гидрогеохимические условия невозможно оценить в режиме реального времени существующими методами, техническими средствами и системами мониторинга. В связи с этим авторами был предложен новый способ контроля за фильтрацией подземных вод, основанный на кондуктометрическом методе.

Для реализации предложенного способа контроля за подземными водами необходимо разработать комплекс технических средств и информационно-измерительных систем мониторинга, обосновать их оптимальные параметры. В связи с этим разработана методика проведения эксперимента, в которой выделена связь импеданса раствора с ее общей минерализацией. Выполнены эксперименты по определению полного, активного и реактивного сопротивлений образцовых растворов, а также тангенса угла диэлектрических потерь в заданном диапазоне входных частот. Определены зависимости между электрофизическими параметрами сульфатных вод и их общим содержанием. Получены диаграммы Найквиста и Боде для образцовых растворов с различным содержанием CaSO_4 . Определены оптимальные параметры технического средства контроля за фильтрацией подземных вод с повышенным содержанием сульфатов. Показаны перспективы применения электрохимической спектроскопии в развитии гидрогеологии, в том числе автоматизации процессов мониторинга размыва оснований зданий и сооружений, утечки химически опасных веществ из хвостохранилищ, предупреждения карстовых и суффозионных процессов, предупреждения землетрясений.

Ключевые слова: фильтрация, импеданс, электрохимическая спектроскопия, основание, сульфаты, растворение, техническое средство.

The article is devoted to the study of electrophysical properties of sulphate groundwater by electrochemical spectroscopy in order to justify the optimal parameters of technical means of control over the dissolution and removal of salts by filtration waters.

Rapidly changing hydrodynamic and hydrogeochemical conditions cannot be assessed in real time by existing methods, technical means and monitoring systems. In this regard, the authors proposed a new method of monitoring groundwater filtration, based on the conductometric method of control.

To implement the proposed method of groundwater control, it is necessary to develop a set of technical means and information-measuring monitoring systems, to justify their optimal parameters. In this regard, the method of the experiment, which highlighted the connection of the impedance of the solution with its total mineralization. Experiments were performed to determine the total, active and reactive resistances of sample solutions, as well as the tangent of the dielectric loss angle in a given range of input frequencies. The dependences between the electrophysical parameters of sulphate waters and their total salinity are determined. Nyquist and Bode diagrams were obtained for sample solutions with different CaSO₄ content. The optimal parameters of the technical means of control over the filtration of groundwater with a high content of sulfates were determined. Prospects of application of electrochemical spectroscopy in development of hydrogeology, including-automation of processes of monitoring of erosion of bases of buildings and constructions, leakage of chemically dangerous substances from tailing dumps, the prevention of development of karst and suffusion processes, the prevention of earthquakes are shown.

Keywords: filtration, impedance, electrochemical spectroscopy, base, sulfates, dissolution, technical means.

Введение

Одной из проблем гидрогеологии на современном этапе является совершенствование систем мониторинга за динамикой и режимом подземных вод [1]. Недостаточная изученность вопросов антропогенного влияния на подземную гидросферу приводит к развитию различных чрезвычайных ситуаций – размыву оснований зданий и сооружений, развитию карста, химическому (радиоактивному, бактериологическому) загрязнению, осушению или обводнению территорий и др.

Быстроменяющиеся гидродинамические и гидрогеохимические условия невозможно оценить в режиме реального времени существующими методами, техническими средствами и системами мониторинга. В связи с этим авторами был предложен новый способ контроля за фильтрацией подземных вод [2]. Для его реализации необходимо разработать комплекс технических средств и информационно-измерительных систем мониторинга [3, 4].

Методика проведения эксперимента

В целях определения оптимального диапазона входных частот технического средства контроля за фильтрационными процессами в породах была разработана методика эксперимента и проведены исследования импеданса (полного сопротивления) на примере сульфатных подземных вод методом электрохимической спектроскопии.

Общая формула определения импеданса выглядит следующим образом:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где Z – импеданс (полное сопротивление); R – активное сопротивление; X – реактивное сопротивление; X_L – реактивное сопротивление индуктивности; X_C – реактивное сопротивление емкости [5].

В рамках эксперимента импеданс Z раствора был представлен как $Z = F(C_{\text{общ}}; f; T)$ при ограничениях:

1. $C_{\text{общ}} \in (C_{\min}; C_{\max})$.
2. $f \in (f_1; f_2)$.
3. $T \in (0, 1; 30)$,

где $C_{\text{общ}}$ – общее солесодержание раствора, г/л; $C_{\min}$ и $C_{\max}$ – соответственно минимальное (ультрапресное) и максимальное (насыщенное) значения солесодержания раствора; f_1 и f_2 – минимальное и максимальное значения диапазона входных частот, Гц; T – диапазон температуры подземных вод, °C.

Входные и выходные параметры системы измерения импеданса образцовых растворов схематически представлены на рис. 1.



Рис. 1. Эмпирическая модель эксперимента / Fig. 1. Empirical model of the experiment

Характеристики входных параметров эксперимента обосновываются свойствами раствора, техническими возможностями используемых приборов и параметрами рабочей среды в лаборатории (табл. 1).

Таблица 1

Значения входных параметров эксперимента
/ Values of experiment input parameters

Параметр	Диапазон
Концентрация CaSO_4 , г/л	0,01–7,00
Частота тока, Гц	100–50000
Температура, °C	20

Описание лабораторной установки

Исследование импеданса образцовых сульфатных растворов было выполнено в лаборатории электрокатализа Института физической химии им. А.Н. Фрумкина РАН (г. Москва). Лабораторная установка состоит из потенциостата Solartron SI 1287, двухэлектродного датчика сопротивлением 10 кОм и компьютера со специальным программным обеспечением для обработки полученных данных. Схема лабораторной установки и ее основные элементы приведены на рис. 2.

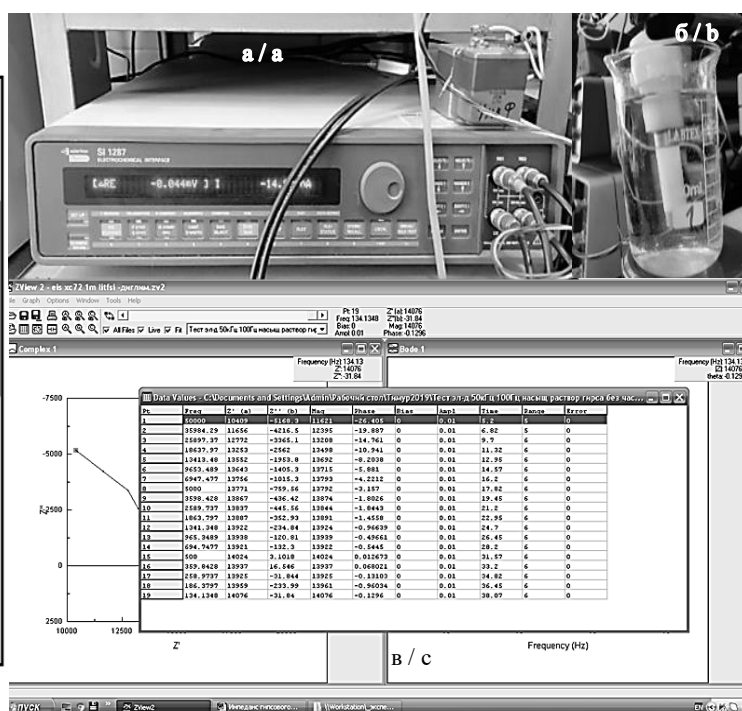
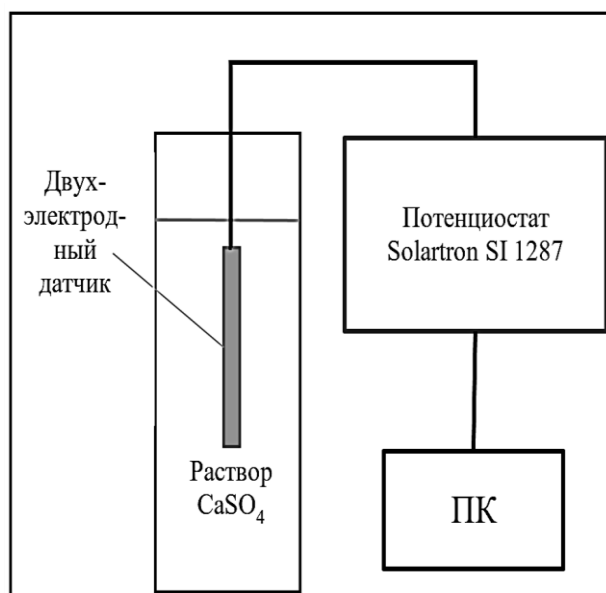


Рис. 2. Схема (слева) и основные элементы (справа) лабораторной установки: а – потенциостат Solartron SI 1287; б – двухэлектродный датчик, погруженный в раствор; в – ПК со специальным ПО для интерпретации и обработки полученных данных / Fig. 2. The scheme (left) and the main elements (right) of the laboratory installation: а - potentiostat Solartron SI 1287; б - two-electrode sensor immersed in solution; в - PC with special software for the interpretation and processing of the data

Подготовка растворов

В качестве растворителя использовалась вода гидрокарбонатная кальциево-натриевая с общей минерализацией 0,1–0,3 г/л. Химический состав воды приведен в табл. 2.

Образцовые растворы были подготовлены в соответствии с ГОСТ 4517-2016. Характеристика образцовых растворов приведена в табл. 3.

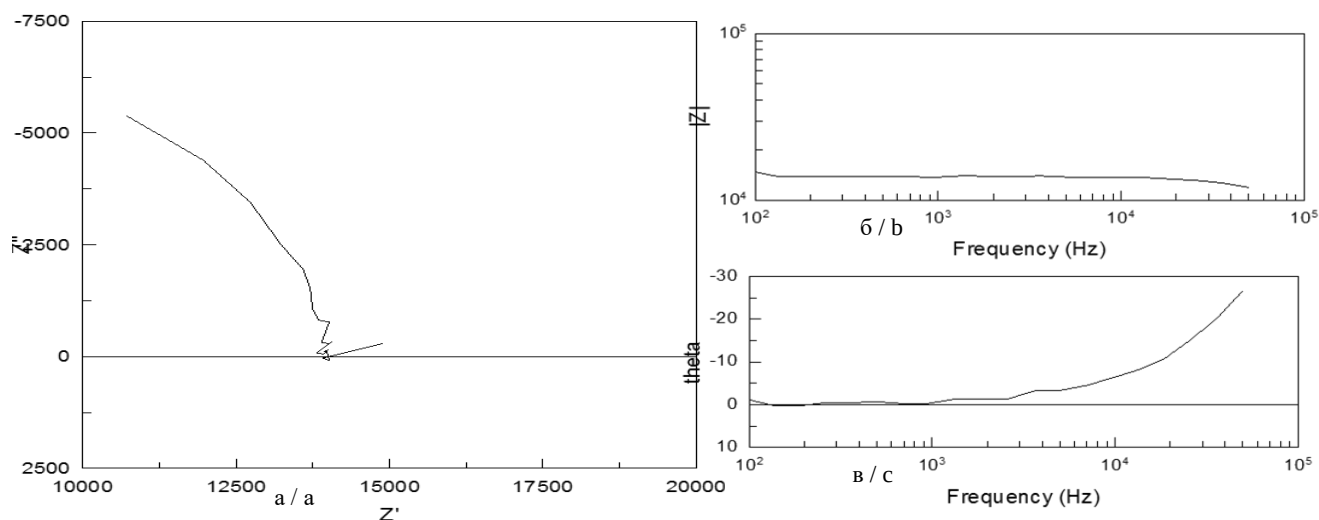
Результаты эксперимента

В результате измерений были получены годографы импеданса растворов в диапазоне частот 100–50000 Гц при заданных концентрациях CaSO_4 , в том числе диаграммы Найквиста ($\text{Im}(z)$ от $\text{Re}(z)$), диаграммы Бode (модуль ($|Z|$) от Freq) и угол сдвига фаз (θ от Freq). Пример полученных данных приведен на рис. 3.

Таблица 2

Химический состав воды, использованной для подготовки растворов
/ Chemical composition of water used for solution preparation

Показатель	Значение показателя	Метод испытаний
Кальций, мг/л	22,0	ГОСТ 23268.5-78
Магний, мг/л	1,2	ГОСТ 23268.5-78
Натрий + калий, мг/л	18,9	ГОСТ 23268.5-78
Нитраты, мг/л	2,2	ПНДФ 14.1:2.4-95
Нитриты, мг/л	< 0,05	МУК 4.1.065-96
Гидрокарбонаты, мг/л	83,0	ПНДФ 14.1:2.99-97
Сульфаты, мг/л	6,6	ГОСТ 4389-72
Хлориды, мг/л	16,9	ПНДФ 14.1:2.96-97
Фториды, мг/л	0,24	МУК 4.1.067-96
Сульфиды, мг/л	< 0,001	МУК 4.1.066-96
Жесткость общая, ммоль/л	1,17	ГОСТ Р 52407-2005
Кислотно-щелочной баланс, рН, ед.	7,1	РД 52.24.495-97
Общая минерализация, мг/л	150,8	ГОСТ Р 51211-98



Pt	Freq	Z' (a)	Z'' (b)	Mag	Phase	Bias	Ampl	Time	Range	Error
1	50000	10409	-5168.3	11621	-26.405	0	0.01	5.2	5	0
2	35984.29	11656	-4216.5	12395	-19.887	0	0.01	6.82	5	0
3	25897.37	12772	-3365.1	13208	-14.761	0	0.01	9.7	6	0
4	18637.97	13253	-2562	13498	-10.941	0	0.01	11.32	6	0
5	13413.48	13552	-1953.8	13692	-8.2038	0	0.01	12.95	6	0
6	9653.489	13643	-1405.3	13715	-5.881	0	0.01	14.57	6	0
7	6947.477	13756	-1015.3	13793	-4.2212	0	0.01	16.2	6	0
8	5000	13771	-759.56	13792	-3.157	0	0.01	17.82	6	0
9	3598.428	13867	-436.42	13874	-1.8026	0	0.01	19.45	6	0
10	2589.737	13837	-445.56	13844	-1.8443	0	0.01	21.2	6	0
11	1863.797	13887	-352.93	13891	-1.4558	0	0.01	22.95	6	0
12	1341.348	13922	-234.84	13924	-0.96639	0	0.01	24.7	6	0
13	965.3489	13938	-120.81	13939	-0.49661	0	0.01	26.45	6	0
14	694.7477	13921	-132.3	13922	-0.5445	0	0.01	28.2	6	0
15	500	14024	3.1018	14024	0.012673	0	0.01	31.57	6	0
16	359.8428	13937	16.546	13937	0.068021	0	0.01	33.2	6	0
17	258.9737	13925	-31.844	13925	-0.13103	0	0.01	34.82	6	0
18	186.3797	13959	-233.99	13961	-0.96034	0	0.01	36.45	6	0
19	134.1348	14076	-31.84	14076	-0.1296	0	0.01	38.07	6	0

r / d

Рис. 3. Годограф импеданса насыщенного сульфатами раствора: а – диаграмма Найквиста ($Im(z)$ от $Re(z)$); б – диаграмма Бode ($|Z|$ от $Freq$); в – диаграмма Бode (θ от $Freq$); г – массив данных опыта / Fig. 3. The hodograph of the impedance of a saturated sulfate solution: a - Nyquist diagram ($Im(z)$ from $Re(z)$); b - Bode diagram ($|Z|$ from $Freq$); c - Bode diagram (θ from $Freq$); d - array of experience data

Таблица 3

Характеристика образцовых растворов
/ Characteristics of sample solutions

Концентрация CaSO ₄ , % от макс. насыщ.	Концентрация CaSO ₄ , г/л	Условное обозначение
0	0,01	C_{min}
15	1,10	$C_{15\%}$
30	2,20	$C_{30\%}$
50	3,50	$C_{50\%}$
100	7,00	C_{max}

Обсуждение результатов

В результате обработки экспериментальных данных были получены зависимости:

$$Z = F(C_{общ}; f);$$

$$R = F(C_{общ}; f);$$

$$X = F(C_{общ}; f);$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{R} = F(C_{общ}; f)$$

при $T = 20^\circ \text{C}$ и $C_{общ} = \{C_{min}; C_{15\%}; C_{30\%}; C_{50\%}; C_{max}\}$.

Графическая интерпретация полученных зависимостей приведена на рис 4–7.

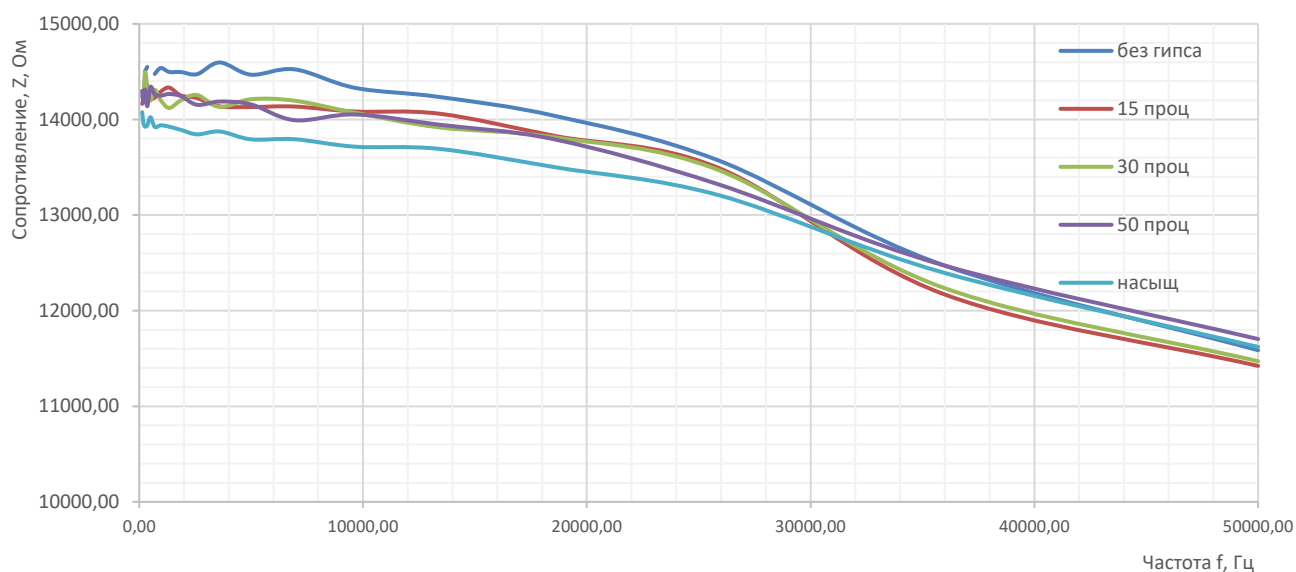


Рис. 4. Зависимость импеданса раствора Z от частоты тока f
/ Fig. 4. Dependence impedance of solution Z on the frequency of the current f

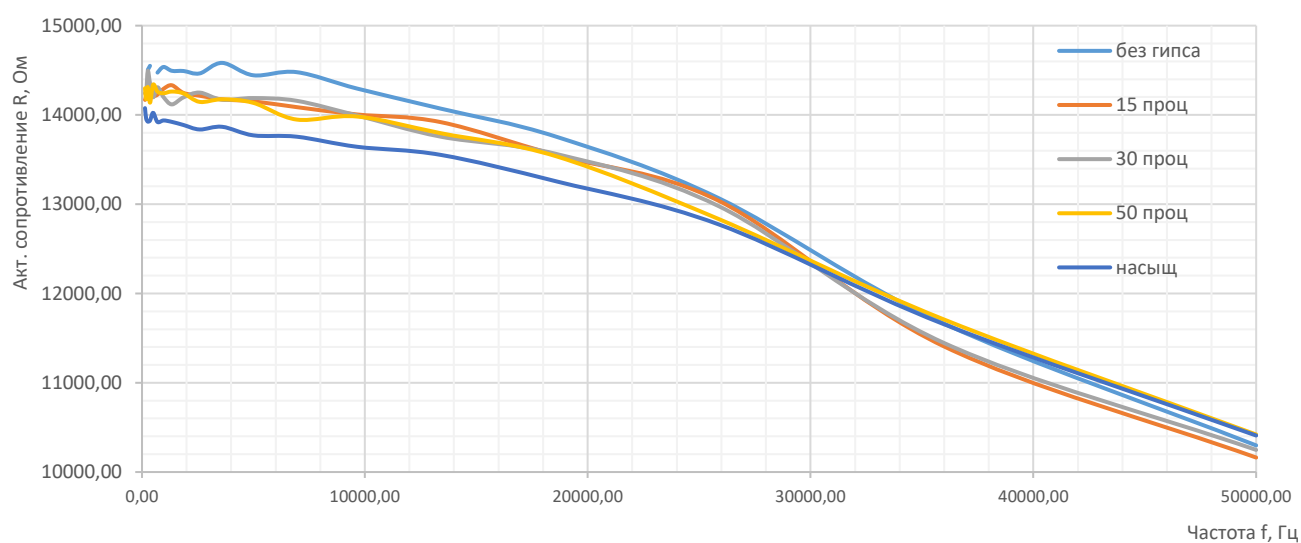


Рис. 5. Зависимость активного сопротивления раствора R от частоты тока f
/ Fig. 5. The dependence of the active resistance of the solution R on the frequency of the current f

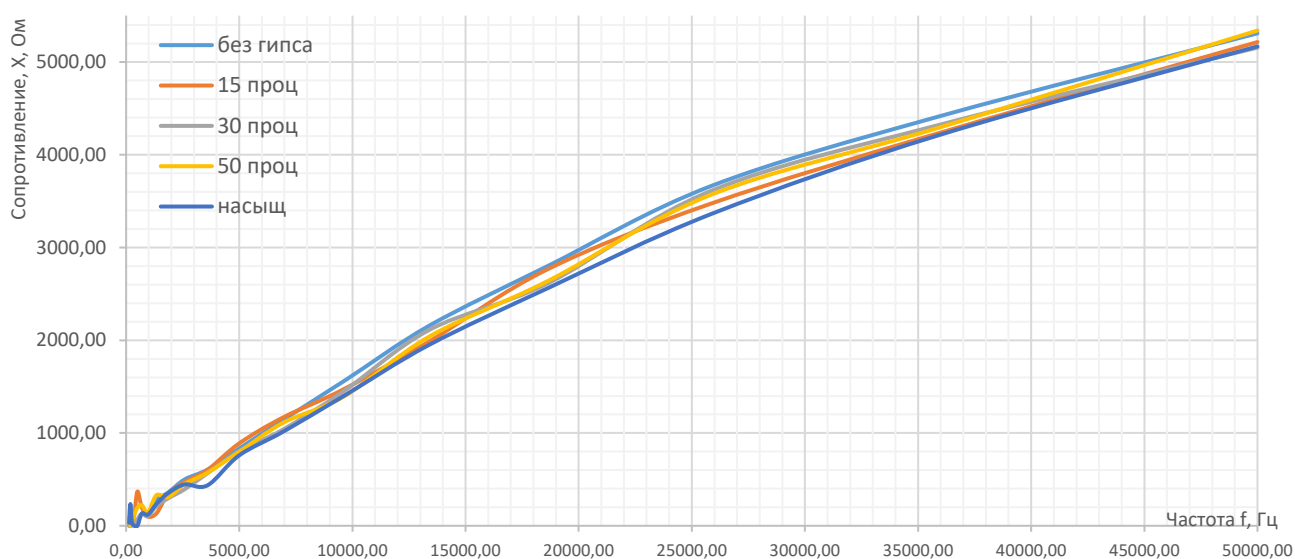


Рис. 6. Зависимость реактивного сопротивления раствора X от частоты тока f
/ Fig. 6. The dependence of the reactance of the solution X on the frequency of the current f

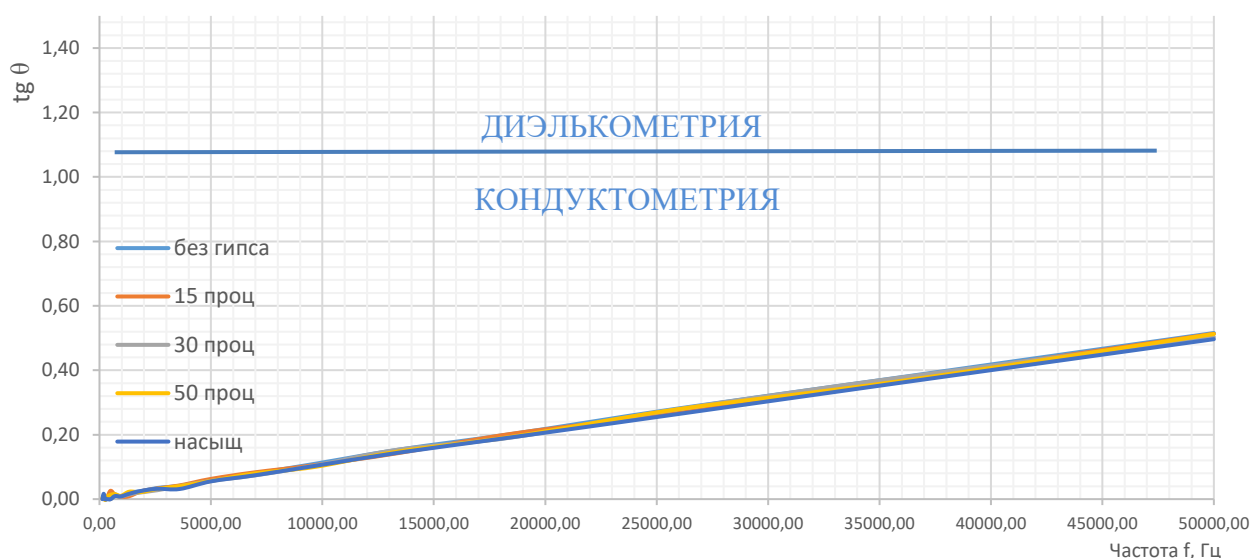


Рис. 7. Зависимость тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg } \theta$ от частоты тока f
/ Fig. 7. Dependence of dielectric loss angle tangent $\text{tg } \theta$ on current frequency f

Анализ полученных данных показал, что в диапазоне частот 100–50000 Гц $|\text{tg } \theta| < 1$. Таким образом, общее солесодержание раствора измерено кондуктометрическим методом. При этом достигается автоматизация процесса фиксации изменений в солевом составе раствора.

Для определения оптимального диапазона частот $f_{\text{опт}}$, где $X \rightarrow \min$, выполнена обработка экспериментальных данных и представлена диаграмма X/Z в процентном соотношении на рис. 7.

При условии $X/Z < 5\%$ получим, что $f_{\text{опт}} \in (134 \text{ Гц}; 3400 \text{ Гц})$.

Заключение

В заключение следует отметить, что полученные результаты эксперимента носят как фундаментальный, так и прикладной характер. Исследование электрофизических свойств подземных вод различных регионов является перспективным направлением развития гидрогеологической науки на современном этапе развития. Представленный подход к изучению основных электрофизических параметров, в том числе импеданса, является универсальным и может быть использован для анализа других типов подземных вод.

В то же время исследование импеданса на примере образцовых сульфатных растворов позволило определить оптимальные параметры технического средства контроля за изменением общего содержания раствора. Это дает возможность автоматизировать процессы мониторинга размыва оснований зданий и сооружений, утечки химически опасных веществ из хвостохранилищ, предупредить развитие карстовых и суффозионных процессов и др.

Особый интерес представляет и возможность разработки технических средств, в режиме реального времени определяющих изменение состава подземных вод в зонах повышенной сейсмической активности, и создания инновационных систем раннего предупреждения землетрясений.

Выводы

1. Исследование электрофизических свойств подземных вод различного типа и состава является одной из ветвей развития гидрогеологической науки. Представленный подход к изучению основных электрофизических параметров, в том числе импеданса, является универсальным и может быть использован для анализа других типов подземных вод.

2. Изучение импеданса образцовых гипсовых растворов позволило определить оптимальные параметры технического средства контроля за фильтрацией подземных вод с повышенным содержанием сульфатов. В качестве технического средства контроля может быть использован скважинный частотный кондуктометр, диапазон входных частот которого составляет 134–3400 Гц.

3. Исследование электрофизических свойств подземных вод различного состава и генезиса позволит разработать системы раннего обнаружения различных чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера: размыва оснований зданий и сооружений, утечки опасных веществ в подземные воды, процессов карстообразования, землетрясений.

Литература

1. Нурмагомедов Т.Н. Изученность фильтрационных процессов разрушения гипсосодержащих пород оснований гидротехнических сооружений // Пожарная безопасность: проблемы и перспективы : сб. тр. IX Всерос. науч.-практ. конф. Воронеж: ГПС МЧС России, 2018. С. 681–684.

2. Нурмагомедов Т.Н., Сианисян Э.С. Электрохимический метод контроля растворения и выноса гипса в основаниях гидротехнических сооружений // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2019. № 2. С. 60–66.

3. Латышенко К.П., Нурмагомедов Т.Н. Обоснование выбора информативного параметра контроля выщелачивания карбонатных пород в основаниях гидротехнических сооружений // Актуальные проблемы пожарной безопасности, предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций : сб. тр. IX Междунар. науч.-техн. конф. Кокшетау: КТИ, 2018. С. 162–165.

4. Нурмагомедов Т.Н. Стасишин Л.А. Информационная система мониторинга фильтрации в основаниях гидротехнических сооружений // Предотвращение. Спасение. Помощь : сб. тр. XXIX Междунар. науч.-практ. конф. 21 марта 2019 г. Химки: АГЗ МЧС России, 2019. С. 101–105.

5. Графов Б.М., Укше Е.А. Электрохимические цепи переменного тока. М.: Наука, 1973. 128 с.

References

1. Nurmagomedov T.N. [The study of filtration processes of destruction of gypsum-containing rocks of the bases of hydraulic structures]. *Pozharnaya bezopasnost': problemy i perspektivy* [Fire safety: problems and prospects]. Proceedings of the IX All-Russian Scientific and Practical Conference. Voronezh: IPSA GPS MChS Rossii, 2018, pp. 681–684.

2. Nurmagomedov T.N., Sianisyan E.S. Elektrokhimicheskii metod kontrolya rastvoreniya i vynosa gipsa v osnovaniyakh gidrotekhnicheskikh sooruzhenii [Electrochemical method of controlling the dissolution and removal of gypsum in the foundations of hydraulic structures]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2019, No. 2, pp. 60–66.

3. Latyshenko K.P., Nurmagomedov T.N. [Substantiation of choice of informative parameter of control of leaching of carbonate rocks in the bases of hydraulic structures]. *Aktual'nye problemy pozharnoi bezopasnosti, preduprezhdeniya i likvidatsii chrezvychainykh situatsii* [Actual problems of fire safety, prevention and liquidation of emergency situations]. Proceedings of the IX International Scientific and Technical Conference. Kokshetau: KTI, 2018, pp. 162–165.

4. Nurmagomedov T.N. Stasishin L.A. [Information system for monitoring filtering in the foundations of hydraulic structures]. *Predotvrashchenie. Spasenie. Pomoshch'* [Prevention. Salvation. Help]. Proceedings of the XXIX International Scientific and Practical Conference. March 21, 2019. Khimki: AGZ MChS Rossii, 2019, pp. 101–105.

5. Grafov B.M., Ukshe E.A. *Elektrokhimicheskie tsepi peremennogo toka* [Electrochemical circuits of alternating current]. Moscow: Nauka, 1973, 128 p.

УДК 502.7+556.33

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-98-103

ПОДЗЕМНЫЕ ВОДЫ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ: ФАКТОРЫ ЗАГРЯЗНЕНИЯ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА

© 2019 г. Г.Ю. Скляренко¹, В.Е. Закруткин¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

UNDERGROUND WATER OF THE ROSTOV REGION: FEATURES OF POLLUTION AND QUALITY

G.Yu. Sklyarenko¹, V.E. Zakrutkin¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Скляренко Григорий Юрьевич – кандидат геолого-минералогических наук, доцент, кафедра геоэкологии и прикладной геохимии, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: gysklyarenko@srfedu.ru

Grigory Yu. Sklyarenko - Candidate of Geology and Mineralogy, Associate Professor, Department of Geoecology and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: gysklyarenko@srfedu.ru

Закруткин Владимир Евгеньевич – доктор геолого-минералогических наук, профессор, заведующий кафедрой геоэкологии и прикладной геохимии, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия, e-mail: vezak@list.ru

Vladimir E. Zakrutkin - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Head of the Department of Geoecology and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vezak@list.ru

Подземные воды Ростовской области в условиях засушливого климата и недостаточного обеспечения населения речной водой, особенно в южных и юго-восточных районах, являются важным источником водоснабжения. Водонасыщенные комплексы, доступные для использования, связаны с каменноугольными, меловыми, палеогеновыми, неогеновыми и четвертичными породами. Крупных скоплений подземные воды не образуют – на территории области выделяются только средние и мелкие месторождения. Химический состав вод существенно отличается как между горизонтами, так и внутри них, причем для почти всех вод характерна достаточно высокая минерализация. Воды подвержены серьезным антропогенным воздействиям, главным образом химическому загрязнению, обуславливающему их невысокое качество, а также неконтролируемому водопользованию. Основными факторами антропогенного воздействия на подземные воды являются воздействие промышленных предприятий; стоки с сельскохозяйственных предприятий и угодий; хозяйственно-бытовые стоки, в том числе стоки с полигонов ТКО; углеводородное загрязнение. Качество подземных вод колеблется от уровня «весьма загрязненная» до «чрезвычайно грязная». Максимальное загрязнение подземных вод связано с угольной добычей в Восточном Донбассе и влиянием промышленных и хозяйственно-бытовых стоков на урбанизированных территориях, таких как Ростовская агломерация.

Ключевые слова: Ростовская область, подземные воды, качество, источники загрязнения, угольная добыча, свалки твердых отходов производства и потребления, сельскохозяйственное загрязнение, углеводородное загрязнение.

Groundwater in the Rostov Region, in conditions of an arid climate and inadequate provision of population with river water, especially in the southern and southeastern regions, is an important source of water supply. The aquifers available for use are associated with Carboniferous, Cretaceous, Paleogene, Neogene and Quaternary. Groundwater does not form large accumulations - only medium and small deposits are allocated in the region. The chemical composition of the waters differs significantly between the horizons and within them, and for almost all waters a fairly high salinity is characteristic. The waters are subject to serious anthropogenic impacts, mainly chemical pollution, which determines their low quality, as well as uncontrolled water use. The main factors of anthropogenic impact on groundwater are the impact of industrial enterprises; drains from agricultural enterprises and land; household wastewater, including wastewater from landfills; hydrocarbon pollution. Groundwater quality ranges from "highly polluted" to "extremely dirty". The maximum pollution of groundwater is associated with coal mining in the East Donbass and the influence of industrial and domestic wastewater in urban areas such as the Rostov agglomeration.

Keywords: Rostov Region, underground water, quality, sources of impact, coal mining, landfills of solid wasters, agricultural pollution, hydrocarbon pollution.

Ростовская область – один из наиболее густонаселенных и засушливых регионов России, население которого испытывает серьезный дефицит чистой воды. Основными источниками являются р. Дон и её крупные притоки – Северский Донец, Маныч, Чир [1]. Вода малых рек, относящихся к бассейну Дона, используется локально – сельскими жителями. Неравномерность речной сети и часто не соответствующее санитарно-эпидемиологическим показателям качество воды в вышеперечисленных водотоках требуют усиления водоснабжения за счет подземных вод [2, 3].

Подземные воды, используемые жителями Ростовской области, связаны с приповерхностными водоносными горизонтами каменноугольного, мелового, палеогенового, неогенового и четвертичного возраста.

Водоносный комплекс каменноугольных отложений связан с известняками и песчаниками, обнажающимися на территории Восточного Донбасса [4]. Естественные выходы подземных вод в виде источников отмечаются в долинах рек и балок. Дебиты источников – 0,1–7 л/с, дебиты скважин в большинстве случаев составляют 0,7–8 л/с (редко – 14–17 л/с). Состав вод сульфатно-гидрокарбонатный (реже хлоридный), среди катионов преобладают кальций и магний. Минерализация достигает 5 г/л, в среднем составляя 3 г/л. Эти воды обеспечивают водоснабжение г. Белая Калитва, а также отдельных предприятий.

Водоносный комплекс меловых отложений эксплуатируется главным образом на севере Ростовской области. Породы-коллекторы представлены пясчым мелом, мергелями и глинами, залегающими моноклинально на южном склоне Воронежской антеклизы. Дебиты скважин здесь составляют 6–13 л/с, достигая 72 л/с, минерализация воды находится в пределах 0,6–1,5 г/дм³. Подземные воды широко используются для водоснабжения населенных пунктов и промышленных предприятий: водозаборы Б. Суходольский, Грачичский, Донецкий, Мало-Каменский II, Долотинский, Миллеровский, Боковский, Чертковский, Обливский.

Водоносный комплекс палеогеновых отложений связан с песками, галечниками, песчаниками и известняками каневско-бучакской свиты эоцена, распространенными на южном склоне Воронежской антеклизы и в закрытой части Донбасса (зоне перекрытия складчатых структур карбона покровом кайнозойских отложений). Наибольшей водообильностью комплекс характеризуется в районе ст. Тацинской и г. Морозовска, где дебиты скважин достигают 18,5–19,4 л/с. Воды здесь пресные и эксплуатируются групповыми водозаборами (Тацинский, Углегорский, Морозовский) для централизованного питьевого водоснабжения населенных пунктов. На южной периферии Восточного Донбасса за счет коллекторов палеогенового возраста осуществляется водоснабжение ст. Родионово-Несветайской (Павленковский водозабор) и п. Матвеев Курган. Дебиты эксплуатационных скважин достигают здесь 17,5 л/с.

Водоносный комплекс неогеновых отложений связан с известняками, песками, песчаниками и глинами конкско-караганского, сарматского, понтического и ергенинского ярусов (от древних к молодым). Такие водовмещающие коллекторы развиты на берегах р. Дон в нижнем его течении, на юге и юго-востоке Ростовской области, где они обнажаются и дренируются речной сетью. Подземные воды данного комплекса преимущественно напорные. Дебиты родников и скважин достигают 50 л/с, в среднем составляя 5–25 л/с. Минерализация воды изменяется в широких пределах – от 0,6 до 8 г/дм³.

Подземные воды неогенового комплекса имеют важное значение для обеспечения водой населенных пунктов и предприятий наиболее засушливых и наименее обеспеченных речной водой юго-восточных районов Ростовской области. Так, вода, вмещаемая конкско-караганскими песчаными отложениями, используется для питьевого водоснабжения п. Гигант и г. Сальска (Гигантовский, Бровкинский водозаборы и эксплуатационные скважины в г. Сальске). Сарматские известняки используются для водоснабжения населенных пунктов Песчанокского и Егорлыкского районов (Песчанокский, Сандатовский водозаборы). Лучшие по ка-

честву воды понтических отложений встречены на самом юге Ростовской области (Егорлыкский и Целинский районы), где они являются основным источником водоснабжения и эксплуатируются централизованными групповыми водозаборами (Мечетинский, Целинский, Егорлыкский). Подземные воды ергенинской свиты на большей части площади распространения являются единственным источником водоснабжения. Путем эксплуатации групповыми водозаборами (Юженский, Зимовниковский, Амтинский, Орловский, Ремонтненский) они широко используются для водоснабжения ряда населенных пунктов (п. Зимовники, Заветное, Ремонтное, Б. Мартыновка, Орловский и др.).

Водоносный комплекс четвертичных отложений (грунтовые воды) распространен на юге Ростовской области в пределах погруженной зоны северного крыла Азово-Кубанской впадины. Наибольшие дебиты скважин (до 10–12 л/с) отмечены в районе с. Самарского. Наименее водообильной является восточная часть территории распространения (Целинский, Сальский районы). Грунтовые воды напорные, слабо- и маломинерализованные с сухим остатком 1,4–4,3 г/дм³ (чаще 2–3,5 г/дм³). В связи с относительно высокой минерализацией эти воды используются лишь для технического водоснабжения отдельных предприятий.

Как отмечалось выше, эксплуатируемые в Ростовской области водоносные комплексы являются приповерхностными. Их питание преимущественно атмосферное. Подземные воды, вмещаемые аллювиальными отложениями в долинах крупных рек (Дон, Северский Донец), гидродинамически связаны с речными водами. Поэтому они уязвимы по отношению к антропогенным воздействиям [5], которые можно разделить на следующие виды:

- воздействие промышленных предприятий;
- стоки с сельскохозяйственных предприятий и угодий;
- хозяйственно-бытовые стоки, в том числе стоки с полигонов твердых отходов производства и потребления (ТОПП);
- углеводородное загрязнение.

Загрязнение за счет воздействия промышленных предприятий в первую очередь связано с угледобывающей промышленностью Восточного

Донбасса [4]. Здесь на протяжении более 150 лет производится шахтная добыча угля. В её результате были радикально нарушены режим и баланс подземных вод. В выработанном подземном пространстве за счет окисления воздухом минералов в условиях постоянного притока подземных вод в горные выработки сформировался их новый техногенный тип – шахтные воды. За счет их миграции происходит загрязнение водоносных горизонтов на очень больших площадях (сотни квадратных километров и более). Основными поллютантами здесь являются сульфат-, гидрокарбонат- и хлор-ионы, среди катионов преобладают железо, марганец, медь. Наибольшие концентрации среди микроэлементов характерны для бериллия, кадмия и стронция [6, 7].

Складирование на поверхности отвалов извлеченной породы привело к просачиванию через них атмосферных осадков в грунтовые воды, загрязнение которых аналогично влиянию шахтных вод [2].

Воздействие промышленных предприятий, расположенных преимущественно в черте населенных пунктов, сводится к просачиванию в грунтовые воды стоков с промплощадок, загрязненных различным мусором и горюче-смазочными материалами (ГСМ).

Стоки с сельскохозяйственных предприятий и угодий представляют собой сточные воды животноводческих ферм и комплексов, птицефабрик; органические и минеральные удобрения; ядохимикаты. Основные компоненты загрязнения – соединения азота, ядохимикаты, калий и фосфор, кроме того, возможно появление хлоридов, сульфатов, кадмия, ртути, меди и др. тяжелых металлов. На один гектар сельскохозяйственных угодий ежегодно вносятся от 40 до 80 т органических удобрений, а также минеральных удобрений: мочевины, селитры, аммиака, аммофоса и др., а водоохранная деятельность всех сельскохозяйственных предприятий, как правило, слабо контролируется [8].

Хозяйственно-бытовые стоки, в том числе стоки с полигонов ТОПП, представлены коммунальными сточными водами, твердыми отходами жилых помещений, предприятий общественного питания, магазинов, городским мусором, шламом коммунальных очистных сооружений [3]. Характерными поллютантами являются

микроорганизмы, азотные соединения, органические кислоты, хлориды, жиры, поверхностно-активные вещества и др. Основными источниками загрязнения этой группы являются свалки; места сбора, транзита и хранения жидких стоков; коммуникации очистных сооружений, лишенные надежного гидроизоляционного экрана. Неблагоустроенный жилой фонд городов и садоводческие товарищества, сельские поселения характеризуются большим количеством мелких (до 2–3 м) свалок, уличных туалетов, бессистемным сбросом жидких стоков. По объему загрязняющих веществ источники загрязнения хозяйственно-бытовой группы превосходят прочие источники загрязнения [8, 9].

Углеводородное загрязнение обычно связано с утечками нефтепродуктов из емкостей и при перекачке, аварийными ситуациями при транспортировке. К потенциальным источникам загрязнения этой группы отнесены склады ГСМ, автозаправочные станции, мойки автотранспорта. Загрязняющими веществами этой группы являются нефть и нефтепродукты (бензин, керосин, дизельное топливо, различные масла) [9, 10].

Качество подземных вод Ростовской области обусловлено характером и интенсивностью вышеперечисленных антропогенных воздействий, в соответствии с которыми предлагается выделить следующие типы территорий:

- территории промышленной угледобычи;
- территории крупных населенных пунктов;
- территории сельских поселений;
- сельскохозяйственные угодья.

Интегральная оценка качества подземных вод на указанных территориях производилась путем расчета суммарного коэффициента загрязнения: $СКЗ = \sum C_i / ПДК_i$ [4].

На основании значений СКЗ использовались следующие категории загрязненности воды:

- 1) $СКЗ < 1$ – условно чистая;
- 2) $СКЗ 1–5$ – слабозагрязненная;
- 3) $СКЗ 5–10$ – весьма загрязненная;
- 4) $СКЗ 10–20$ – очень загрязненная;
- 5) $СКЗ 20–50$ – грязная и очень грязная;
- 6) $СКЗ > 50$ – чрезвычайно грязная вода.

Территории промышленной угледобычи характеризуются максимальными уровнями и площадями техногенного воздействия. Примером может служить Восточный Донбасс. Здесь на

площадях в сотни квадратных километров произошло нарушение целостности горнопородных массивов, являющихся водоносными коллекторами, вследствие чего изменились режим и баланс подземных вод, смешались воды разных горизонтов, произошло окисление минералов и резкое увеличение минерализации воды, в результате чего сформировались агрессивные шахтные воды [11].

Угледобыча является хотя и не единственным, но основным типом антропогенных воздействий, определяющим категории загрязнения подземных вод, среди которых преобладают грязные и очень грязные и чрезвычайно грязные воды.

Территории крупных населенных пунктов характеризуются развитой промышленностью и высокой плотностью населения, что влечет за собой увеличение объемов сбросов промышленных вод, хозяйственно-бытовых стоков, формирование твердого мусора и свалок ТОПП [12]. Интенсивность загрязнения подземных вод урбанизированных районов неравномерно распределяется по площади. Встречаются воды от категории «очень загрязненная» до «грязная и очень грязная». Чрезвычайно грязные воды приурочены обычно к локальным участкам, на которых произошли аварии.

Территории сельских поселений, несмотря на меньшие количество и плотность населения, имеют гораздо менее развитую инфраструктуру – канализацию и очистные сооружения, оборудованные площадки складирования мусора. В то же время здесь сосредоточены животноводческие комплексы, активно ведется приусадебное хозяйство: огородничество и разведение домашних животных. Производится забор подземных вод из скважин и колодцев. Воды таких территорий преимущественно относятся к категории «грязная и очень грязная».

Сельскохозяйственные угодья занимают большую часть региона. Это обширные площади, на которых часто накладываются антропогенные воздействия разного характера. Для них характерны воды 3-й категории качества – «весьма загрязненные».

Таким образом, можно сделать вывод, что подземные воды на территории Ростовской области в условиях засушливого климата и недостаточного обеспечения населения речной во-

дой, особенно в южных районах, являются важным источником водоснабжения. Они подвержены серьезным антропогенным воздействиям, обуславливающим их невысокое качество, которое колеблется от уровня «весьма загрязненная» до «чрезвычайно грязная». Высоким качеством и минимальным загрязнением отличаются воды сельскохозяйственных территорий севера региона. Максимальное же загрязнение подземных вод и их низкое качество связаны с углепромышленными районами Восточного Донбасса и урбанизированными территориями на юго-западе области.

Литература

1. Экологический атлас Ростовской области / под ред. В.Е. Закруткина. Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. 120 с.
2. Назаренко В.В., Назаренко О.В. Состояние подземных вод на территории Ростовской области // Экологические проблемы. Взгляд в будущее. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2007. С. 252–256.
3. Назаренко О.В. Роль климата в формировании грунтовых вод на территории г. Ростова-на-Дону // Тр. Географического общества Республики Дагестан. 2013. № 41. С. 110–112.
4. Закруткин В.Е., Склярченко Г.Ю., Бакаева Е.Н., Решетняк О.С., Гибков Е.В., Фоменко Н.Е. Поверхностные и подземные воды в пределах техногенно нарушенных геосистем Восточного Донбасса: формирование химического состава и оценка качества. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2016. 170 с.
5. Дрововозова Т.И., Марыгин В.О. Гидрохимическая и геологическая оценка подземных вод Ростовской области // Sciences of Europe. 2018. № 33-2 (33). С. 39–44.
6. Sklyarenko G., Zakrutkin V. The nature of change in technogenic contamination of the underground water of the Eastern Donbass (Russia) // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM, Water Resources. 2017. Vol. 17. P. 711–716.
7. Zakrutkin V., Sklyarenko G.Yu., Gibkov E. Technogenic geochemical streams of coal-mining territories and its influence on the environment // International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM. 2016. № 3-1. P. 289–294.
8. Зубков Е.А. Грунтовые воды юга Ростовской области и их влияние на подтопление территорий населенных пунктов : автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Ростов н/Д.: ЮФУ, 2016. 22 с.

9. Никаноров А.М., Гарькуша Д.Н., Зубков Е.А., Барцев О.Б., Минина Л.И. Гидрохимический режим и качество грунтовых вод застроенных территорий на юге Ростовской области // Водные ресурсы. 2018. Т. 45, № 2. С. 171–178.

10. Закруткин В.Е., Холодков Ю.И., Подольский А.Д. Экологические последствия эксплуатации нефтехранилищ в междуречье рек Дон и Сал // Геоэкология. Инженерная геология, гидрогеология, геокриология. 2007. № 6. С. 506–517.

11. Склярченко Г.Ю., Закруткин В.Е., Зубов А.Р., Зубова Л.Г., Решетняк О.С. Влияние угледобычи в Донбассе на подземные и поверхностные воды // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 3-1. С. 100–107.

12. Zakrutkin V.E., Shishkina D.Yu., Gibkov E.V., Sklyarenko G.Yu. Landfills of municipal solid wasters as a sources of impact on the environment (ecology-geochemical aspect) // International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM. 2018. Vol. 18, № 5-2. P. 553–561.

References

1. *Ekologicheskii atlas Rostovskoi oblasti* [Ecological atlas of the Rostov region]. Ed. V.E. Zakrutkin. Rostov-on-Don: Izd-vo SKNTs VSh, 2000, 120 p.
2. Nazarenko V.V., Nazarenko O.V. [State of groundwater in the Rostov region]. *Ekologicheskie problemy. Vzglyad v budushchee* [Environmental problem. Prospection]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2007, pp. 252–256.
3. Nazarenko O.V. Rol' klimata v formirovanii gruntovykh vod na territorii g. Rostova-na-Donu [The role of climate in the formation of groundwater on the territory of Rostov-on-Don]. *Tr. Geograficheskogo obshchestva Respubliki Dagestan*. 2013, No. 41, pp. 110–112.
4. Zakrutkin V.E., Sklyarenko G.Yu., Bakaeva E.N., Reshetnyak O.S., Gibkov E.V., Fomenko N.E. *Poverkhnostnye i podzemnye vody v predelakh tekhnogenno narushennykh geosistem Vostochnogo Donbassa: formirovanie khimicheskogo sostava i otsenka kachestva* [Surface and underground waters within technogenic disturbed geosystems of Eastern Donbass: formation of chemical composition and quality assessment]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, 170 p.
5. Drovovozova T.I., Marygin V.O. *Gidrokhimicheskaya i geologicheskaya otsenka podzemnykh vod Rostovskoi oblasti* [Hydrochemical and geological evaluation of groundwater of Rostov region]. *Sciences of Europe*. 2018, No. 33-2 (33), pp. 39–44.
6. Sklyarenko G., Zakrutkin V. The nature of change in technogenic contamination of the underground water

of the Eastern Donbass (Russia). *International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM, Water Resources*. 2017, vol. 17, pp. 711-716.

7. Zakrutkin V., Sklyarenko G.Yu., Gibkov E. Technogenic geochemical streams of coal-mining territories and its influence on the environment. *International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM*. 2016, No. 3-1, pp. 289-294.

8. Zubkov E.A. *Gruntovye vody yuga Rostovskoi oblasti i ikh vliyanie na podtoplenie territorii naselennykh punktov: avtoref. dis. ... kand. geogr. nauk* [Ground waters of the South of the Rostov region and their influence on flooding of territories of settlements]. Rostov-on-Don: YuFU, 2016, 22 p.

9. Nikanorov A.M., Gar'kusha D.N., Zubkov E.A., Bartsev O.B., Minina L.I. *Gidrokhimicheskii rezhim i kachestvo gruntovykh vod zastroyennykh territorii na yuge Rostovskoi oblasti* [Hydrochemical regime and quality of ground water of built-up territories in the South of the

Rostov region]. *Vodnye resursy*. 2018, vol. 45, No. 2, pp. 171-178.

10. Zakrutkin V.E., Kholodkov Yu.I., Podol'skii A.D. *Ekologicheskie posledstviya ekspluatatsii neftekhranilishch v mezhdurech'e rek Don i Sal* [Ecological consequences of oil storage operation in the rivers Don and Sal]. *Geoekologiya. Inzhenernaya geologiya, gidrogeologiya, geokriologiya*. 2007, No. 6, pp. 506-517.

11. Sklyarenko G.Yu., Zakrutkin V.E., Zubov A.R., Zubova L.G., Reshetnyak O.S. *Vliyanie ugledobychi v Donbasse na podzemnye i poverkhnostnye vody* [Influence of coal mining in Donbass on underground and surface waters]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2017, No. 3-1, pp. 100-107.

12. Zakrutkin V.E., Shishkina D.Yu., Gibkov E.V., Sklyarenko G.Yu. Landfills of municipal solid wastes as a sources of impact on the environment (ecology-geochemical aspect). *International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM*. 2018, vol. 18, No. 5-2, pp. 553-561.

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

SCIENTIFIC LIFE

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-104-106

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ СБАЛАНСИРОВАННОГО РАЗВИТИЯ ГОРНЫХ ТЕРРИТОРИЙ В КОНТЕКСТЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ПОДХОДА»

(Карачаевск, 27–29 сентября 2019 г.)

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE “ACTUAL DIRECTIONS OF THE BALANCED DEVELOPMENT OF MOUNTAIN TERRITORIES IN THE CONTEXT OF THE INTERDISCIPLINARY APPROACH”

(Karachaevsk, September 27-29, 2019)



С 27 по 29 сентября в Карачаево-Черкесском государственном университете имени У.Д. Алиева состоялась I Международная научная конференция «Актуальные направления сбалансированного развития горных территорий в контексте междисциплинарного подхода». Конференция объединила представителей разных регионов России и мирового пространства, научный и профессорско-преподавательский состав вузов Юга России, представителей горного населения, молодежных организаций и специалистов разного уровня управления природопользованием.

В работе конференции приняли участие более 170 человек из 19 стран мира (Абхазия, Армения, Белоруссия, Венгрия, Вьетнам, Германия, Египет, Ирак, Казахстан, Канада, Китай, Монголия, Польша, Румыния, Россия, Таиланд, Украина, Чехия, Швейцария) и 20 субъектов РФ.

Конференция посвящена обсуждению фундаментальных научных проблем, связанных с современным состоянием и основными тенденциями сбалансированного развития горных территорий. В представленных докладах на секции «Науки о земле. Междисциплинарные подходы к изучению и освоению горных территорий» детально рассмотрены актуальные вопросы комплексного изучения горных геосистем России, Армении и Казахстана.

Весьма перспективный геоэкологический интерес представляют результаты научных исследований в области ландшафтно-геохимической структуры речных артерий Армении, устойчивости к землетрясениям горных строений в Алматы, особенностей преобразования горных ландшафтов в изменяющемся климате Приэльбрусья, радиального перераспределения химических элементов в горных почвах Большого Кавказа, активизации обвальных процессов в высокогорной зоне Западного Кавказа.

Большая часть докладов секции «Геоэкологические исследования как инструмент определения современного состояния и предельной антропогенной нагрузки на горные системы» была посвящена оценке состояния и степени загрязнения атмосферного воздуха и речных вод на примере Приэльбрусья и Краснодарского края по данным лабораторных и экспедиционных исследований. В докладах, посвященных особо охраняемым природным территориям (ООПТ), помимо объектов, заслуживающих включения в перечень памятников природы (ПП), рассмотре-

ны дискуссионные вопросы выделения и классификации ООПТ.

В рамках секции «Социально-экономические, педагогические и историко-культурные аспекты сбалансированного развития горных территорий» убедительно изложена модель формирования эколого-географического мышления на основе этнотопонимических материалов, рассмотрены управленческая компетентность преподавателя высшей школы и опыт внедрения предмета «монтология» в учебные планы географических и экологических специальностей КЧГУ. Показана роль природы и изобразительного искусства в художественно-эстетическом развитии личности; отмечено, что глобализация наряду с ускорением технического прогресса несет риски для культурного развития малых этносов. Изучены особенности формирования социокультурных ценностей в полиэтнической среде и вопросы трудовой миграции.

Большинство докладов секции туристского направления (секция «Туризм как фактор сбалансированного развития горных территорий») отличаются теоретической новизной и широким привлечением опыта зарубежных стран – лидеров в сфере туризма. Предложена модель и роль бренда территории как нематериального фактора развития въездного и внутреннего туризма (в качестве эталонного курорта выбран Архыз). Рассмотрены специфика подготовки кадров для туристской отрасли (на примере макрорегиона Енисейская Сибирь), структура и состав комплексного туристского ресурса (на примере Сочинского экополиса). Проанализированы особенности управления региональными туристскими потоками, а также необходимость учета как положительного их вклада в экономику, так и отрицательного влияния на природную среду.

В подготовке мероприятия под руководством председателя оргкомитета – ректора КЧГУ Т.А. Узденова принимали участие министр образования и науки КЧР к.э.н. И.В. Кравченко; министр туризма, курортов и молодежной политики КЧР к.т.н. А.Н. Эркенов; проф., завкафедрой экологии и природопользования КЧГУ, председатель Карачаево-Черкесского отделения РГО д.г.н. В.В. Онищенко; доц. кафедры физической и экономической географии КЧГУ к.г.н. П.А. Кипкеева; проф., проректор по научно-исследовательской работе КЧГУ к.ф.н. С.У. Пазов; проректор по СЭВ и РИГ КЧГУ к.п.н. О.М. Батчаев; доц., начальник Управления заочного обучения КЧГУ к.п.н. Ю.М. Алиев; доц.,

декан естественно-географического факультета КЧГУ к.б.н. А.У. Эдиев; доц., начальник отдела сопровождения научных исследований КЧГУ к.и.н. М.Н. Кубанова; доц., завлабораторией геоэкологического мониторинга КЧГУ к.г.н. Н.С. Дега.

В программный комитет конференции вошли: академик РАН, научный руководитель Высокотехнологического геофизического института, почетный доктор КЧГУ, д.г.н., проф. М.Ч. Залиханов; академик РАН, первый вице-президент РАН д.ф.-м.н., проф. Ю.Ю. Балега; проф. кафедры рисунка КЧГУ д.психол.н. Б.Н. Тамбиев; проф. кафедры истории России КЧГУ д.и.н. Р.М. Бегеулов; зампредседателя по науке Северо-Кавказского академического центра ИАА., проф. ИАА, чл.-корр. Международной академии архитектуры, почетный архитектор России В.Б. Бесолов; завкафедрой геоэкологии и прикладной геохимии ЮФУ д.г.-м.н., проф. В.Е. Закруткин; чл.-корр. РАН, председатель Карачаево-Черкесского отделения ВОО «Центр экологической политики и культуры» д.т.н. В.С. Кочетов; вице-президент ООПР «Экосфера», действительный член Международной академии исследований будущего, в.н.с. Института географии РАН д.г.н., проф. Б.И. Кочуров; проф. Института безопасности гидротехнических сооружений д.г.-м.н. Ю.Я. Потапенко; декан факультета психологии и социальной работы КЧГУ д.психол.н., проф. Ф.О. Семенова; доктор юридического факультета Чиангмайского университета (Таиланд) А.Н. Шитов.

С докладами на пленарном заседании выступили завкафедрой экологии и природопользования Карачаево-Черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева, председатель Карачаево-Черкесского отделения РГО (Карачаевск) д.г.н., проф. В.В. Онищенко на тему «Постгляциальное ландшафтообразование Северо-Западного Приэльбрусья в условиях изменяющегося климата»; зам. председателя по науке Северо-Кавказского академического цен-

тра ИАА., проф. ИАА, чл.-корр. Международной академии архитектуры, почетный архитектор России (Алагир) В.Б. Бесолов – «Биосфера Центрального Кавказа как лоно формирования и развития коренных горских народностей и мировое значение их традиционного архитектурно-художественного наследия»; археолог Университета Западной Богемии, кафедра археологии (г. Пльзень), А.Г. Голембиовска-Тобиаш – «Development of mountain tourism based on the archaeological reserves and monuments (by the example of the Świętokrzyskie mountains)» и др.

Актуальность представленных докладов вызвала эмоциональный отклик у аудитории. Итогом конференции стало принятие резолюции, в которой отмечается, что Северный Кавказ должен развиваться по одному-единственному пути: сбалансированный эколого-экономический подход на основе уважения культуры, традиций и навыков местного населения и ускоренного внедрения инновации в экономику, технологии и управление. Решение сложнейших социально-экономических и экологических проблем Северного Кавказа требует разработки комплексных программ социально-экономического и экологического развития территории.

Основными целями таких комплексных программ являются снижение антропогенной нагрузки на природную среду и достижение приемлемого качества окружающей среды; разработка и внедрение экологических («зеленых») технологий и развитие экологического бизнеса; формирование эффективных кластеров природопользования; переход на сбалансированное и экологически безопасное развитие.

Предлагается разработать комплексную программу сбалансированного ноосферного развития Северного Кавказа «Северо-Кавказский ноосферный регион», в рамках которой все республики, являясь равноправными, объединяются для решения сложных актуальных проблем социально-экономического и экологического характера всего региона.

В.В. Онищенко, доктор географических наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева

В.Е. Закруткин, доктор геолого-минералогических наук, профессор, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет

О.С. Решетняк, кандидат географических наук, доцент, Институт наук о Земле, Южный федеральный университет

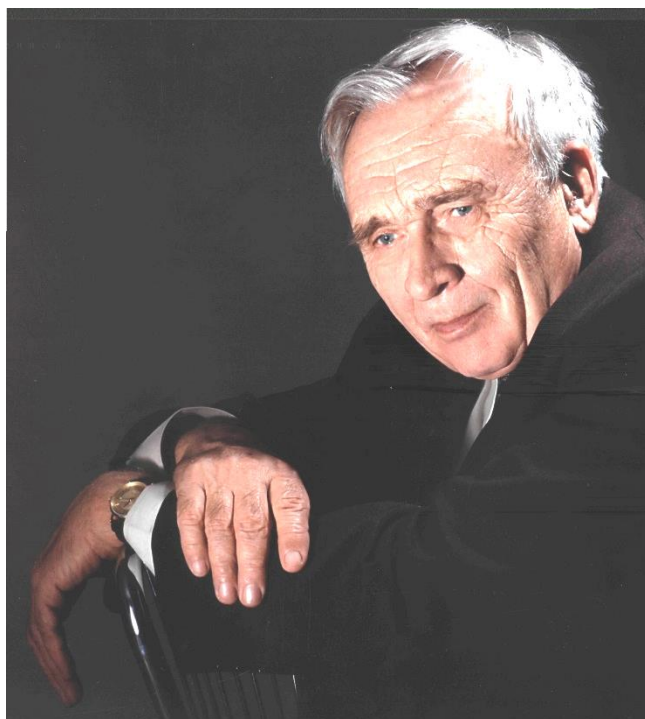
НАШИ ЮБИЛЯРЫ

OUR PERSONS

DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-107-109

ЮРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ УСТИНОВ (85 лет со дня рождения)

YURI ANATOLIEVICH USTINOV (To the 85th Anniversary)



14 ноября 2019 г. исполнилось 85 лет известному ученому-механику, профессору кафедры теории упругости Южного федерального университета (ЮФУ), заслуженному деятелю науки РФ, доктору физико-математических наук Юрию Анатольевичу Устинову.

В 1952 г. Юрий Анатольевич после окончания школы поступил на отделение механики физико-математического факультета Ростовского государственного университета (РГУ). В 1957 г. он окончил универси-

тет и начал работать ассистентом кафедры теоретической механики. Его первые работы, выполненные под руководством И.И. Воровича, посвящены решению контактной задачи о взаимодействии жесткого штампа с упругим слоем на основе асимптотического подхода. Эти исследования заложили основы нового в то время научного направления – смешанные задачи теории упругости для полуограниченных тел.

В 1961 г. на факультете была создана кафедра теории упругости, Юрий Анатольевич стал одним из первых ее аспирантов. Во время обучения в аспирантуре он разработал новый оригинальный асимптотический метод, позволивший изучить особенности напряженно-деформированного состояния в многосвязных телах со сближенными границами. Эти результаты составили основу его кандидатской диссертации на тему «Некоторые задачи теории упругости для двухсвязных областей с круговыми границами и их приложение» (1964 г.).

Для Ю.А. Устинова характерно сочетание глубоких фундаментальных исследований, основанных на спектральной теории операторов и функциональном анализе, с решением важных прикладных задач. Он внес существенный вклад в разработку методов расчета прочности горячей посадки бандажей на центры зубчатых колес прокатных станов и шахтных подъемников. По результатам этих исследований в соавторстве с И.И. Воровичем и Ю.В. Сафроновым была опубликована первая монография «Расчет колес сложной конструкции» (М.: Машиностроение, 1967).

Дальнейшие научные интересы Юрия Анатольевича связаны с проблемой предельного перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным. Им была построена математическая теория толстых поперечно-неоднородных плит, которая включает в себя методы построения неоднородных (позволяющих снять нагрузку с лицевых поверхностей плиты и свести задачу к однородной задаче) и однородных решений. Были реализованы алгоритмы расчета трехмерных задач и дано строгое математическое обоснование их сходимости. На основе построенной математической теории были проанализированы области применимости различных известных прикладных теорий и построены новые уточненные теории. Проведен анализ трехмерного напряженного состояния трехслойной плиты в окрестности локальной нагрузки.

Результаты исследований в области поперечно-неоднородных плит составили основу его докторской диссертации «Граничные задачи и проблема предельного перехода от трехмерных задач к двумерным для неоднородных плит», защищенной в 1977 г. в Институте проблем механики АН СССР. В 2006 г. результаты этих исследований были опубликованы в монографии «Математическая теория поперечно-неоднородных плит».

Тяга к исследованию новых научных проблем привела Ю.А. Устинова в 70-е гг. XX в. к изучению новых классов задач, находящихся на стыке механики твердого деформируемого тела и физики сегнетоэлектриков. Он одним из первых на основе трехмерных уравнений начал разрабатывать математическую теорию и методы расчета статических и динамических задач электроупругости, которые были применены далее для расчета реальных датчиков и устройств адаптивной оптики.

Ю.А. Устинов с учениками получил ряд фундаментальных результатов при исследовании распространения волн в неоднородных телах. Для твердых волноводов и слоистых плит из упругих и электроупругих материалов дано полное математическое описание структуры решений в окрестности толщинных резонансов. Часть полученных результатов опубликована в монографии «Математическая теория нерегулярных твердых волноводов» (1993 г.), написанной совместно с его учеником И.П. Гетманом.

В 90-е гг. он начинает исследования, связанные с классическими задачами Сен-Венана для

таких конструктивных элементов, как естественно закрученный стержень, цилиндрическая пружина, цилиндр с винтовой анизотропией. Разработан новый метод и на его основе решение трехмерных задач сведено к двумерным, дана вариационная постановка этих задач. Эти исследования нашли свое отражение в монографии «Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров» (2003 г.).

Широта научных интересов и богатейший опыт в решении различных практических задач позволили ему создать математическую модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах.

Имя Ю.А. Устинова широко известно не только во многих университетских центрах России (Москва, Санкт-Петербург, Саратов, Казань), где ему часто приходилось оппонировать при защите кандидатских и докторских диссертаций, но и в странах ближнего и дальнего зарубежья (Украина, Армения, Азербайджан). В 2003 г. он руководил грантом Лондонского математического общества совместно с учеными, работающими в Манчестерском университете. Разработанные Ю.А. Устиновым подходы к аналитическому и численному исследованию равновесия и устойчивости нелинейно-упругих оболочек сложной геометрической формы позволили выполнить работу по оптимизации формы гофрированных мембран для крупной компании Германии.

Юрий Анатольевич является создателем и научным руководителем научной школы «Математическая теория и методы расчета конструкций из материалов со сложными физико-механическими свойствами». Его учениками являются 17 кандидатов и 4 доктора физико-математических наук. Среди них 2 декана, 2 заведующих кафедрами, член-корреспондент НАН Азербайджана М.Ф. Мехтиев, заведующий научным отделом фирмы Endress+Hauzer (Германия), д.физ.-мат.н. И.П. Гетман. Ю.А. Устинов – обладатель звания заслуженного деятеля науки РФ, член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, член редколлегий журналов «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» и «Известия НАН Азербайджана».

Ю.А. Устинов работает в системе высшей школы более 60 лет, из них большую часть – в РГУ (ЮФУ). За время его педагогической деятельности им разработан ряд основных и оригинальных спецкурсов: «Теоретическая механика»,

«Теория оболочек», «Теория толстых плит», «Плоские и пространственные задачи теории упругости», «Электроупругость», «Приложения функционального анализа в задачах МСС». Одним из первых сотрудников механико-математического факультета РГУ Юрий Анатольевич был удостоен звания сороковского профессора.

Ю.А. Устинов – крупный организатор научного, учебного и воспитательного процесса в системе высшего образования на Юге России. Свидетельство этого – работа деканом механико-математического факультета РГУ (1978–1979 гг.) и ректором Ростовского института сельскохозяй-

ственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет) в 1983–1987 гг.

На протяжении многих лет Юрий Анатольевич принимает активное участие в аттестации кадров высшей квалификации. С 2002 по 2019 г. он являлся председателем диссертационного совета Д 212.208.06 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при РГУ (ЮФУ).

Большие заслуги Ю.А. Устинова в деле подготовки кадров отмечены орденами «Знак Почета» и Дружбы.

Коллектив сотрудников Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, редакция и редколлегия журнала «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» сердечно поздравляют Юрия Анатольевича с юбилеем и желают здоровья и новых творческих успехов в научной и педагогической деятельности на благо отечественной науки!

Указатель материалов, опубликованных в журнале
«Известия высших учебных заведений.
Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2019 г.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Авсянкин О.Г., Каменских Г.А.</i> Формула решения многомерного интегрального уравнения с однородным радиальным ядром	4
<i>Алдашев С.А.</i> Нелокальная краевая задача в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе.....	1
<i>Баламирзоев А.Г., Агаханов С.А.</i> Поведение интерполяционных многочленов в окрестности точек разрыва первого рода.....	4
<i>Бердник Я.А., Сумбатян М.А.</i> Обтекание телесного аэродинамического профиля потоком вязкой жидкости	4
<i>Ватульян А.О., Поддубный А.А.</i> Об одной модели деформирования неоднородной полосы и идентификации ее свойств.....	4
<i>Данилова Н.В., Землякова И.А.</i> Квантильное хеджирование на неполном рынке	2
<i>Жуков М.Ю., Цывенкова О.А.</i> Моделирование гравитационной концентрационной конвекции при изотаксофорезе	4
<i>Жуков М.Ю., Ширяева Е.В., Васильев А.В.</i> Модель стационарного турбулентного течения и процесс седиментации примеси	3
<i>Ибаев Т.И.</i> Решение задачи Коши для системы трёх дифференциальных уравнений с производной дробного порядка.....	2
<i>Ильин К.И., Моргулис А.Б.</i> Критические кривые сквозного течения Куэтта – Тейлора	1
<i>Колосова Е.М., Данильченко С.А.</i> Нестационарное контактное взаимодействие в подшипнике скольжения с учётом трения, тепловыделения и износа	4
<i>Лысенко И.А.</i> Об устойчивости вихревого треугольника, квадрата и пентагона в двухжидкостной плазме	1
<i>Мирошников А.Л., Миллер Н.В., Трефилова И.А., Гейбука С.В.</i> Об использовании многомерных интегралов для оценки функции концентрации.....	4
<i>Норкин М.В.</i> Несимметричное кавитационное движение кругового цилиндра в жидкости после удара.....	1
<i>Паес Белтран О.Л.</i> Ограниченность гармонического проектора Бергмана в некоторых банаховых пространствах функций нестандартного роста	3
<i>Петровская Н.В.</i> Асимптотический анализ шестимерной модели свободной конвекции в сфероидальной полости при исчезающей диссипации	3
<i>Пожарский Д.А., Бедоидзе М.В., Пожарская Е.Д.</i> Периодические контактные задачи для слоя	1
<i>Рустанов А.Р., Мелехина Т.Л., Юдин А.И.</i> Геометрия тензора Нейенхейса SPCs-многообразий	2
<i>Рустанов А.Р., Юдин А.И., Мелехина Т.Л.</i> Геометрия строго псевдокосимплектических многообразий ..	1
<i>Старикова О.А.</i> Нормальный вид и классы проективно конгруэнтных симметричных матриц.....	3
<i>Тюриков Е.В.</i> Критерий безусловной разрешимости для одного класса граничных задач теории бесконечно малых изгибаний поверхностей	3
<i>Хубежты Ш.С.</i> Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева	4
<i>Чуев К.А.</i> Математическое моделирование тепломассообмена при конвективной сушке железорудного сырья.....	1
<i>Шармин В.Г., Шармин Д.В.</i> Поверхности без кручения в многомерном евклидовом пространстве.....	2

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Андреева Е.С., Климов П.В., Андреев С.С., Ларина Т.А., Липовицкая И.Н. Аспекты загрязнения атмосферного воздуха Ростова-на-Дону (на примере периода времени с 2015 по 2017 г.).....	3
Байрамов Т.Ш. Социально-экономическое положение и миграция населения в Губа-Хачмазском экономическом районе Азербайджанской Республики.....	2
Барабашин Т.О., Сиверина Т.В., Короткова Л.И. Хлорорганические соединения в экосистеме р. Темерник (г. Ростов-на-Дону)	2
Битюков Н.А., Ткаченко Ю.Ю., Денисов В.И. Максимальный и минимальный сток на реках Сочинского Причерноморья.....	4
Бондаренко Д.Д., Ершов В.В. Газогеохимия грязевых вулканов в связи с прогнозом нефтегазоносности земных недр	2
Васта Ахмед Х.А., Решетняк О.С., Закруткин В.Е. Комплексная оценка современного состояния речных экосистем в бассейне Северского Донца (в пределах Ростовской области).....	2
Гасанов Г.Н., Асварова Т.А., Гаджиев К.М., Баширов Р.Р., Абдулаева А.С., Ахмедова З.Н., Салихов Ш.К., Семенова В.В., Шайхалова Ж.О. Аккумуляция калия и кальция растительными ассоциациями пастбищных фитоценозов Терско-Кумской низменности	1
Гусейнова С.М., Джафарова Ч.М., Джафаров А.М. Горно-коричневые почвы южного склона Большого Кавказа	1
Демина О.Н., Кипкеева П.А., Потапенко Ю.Я., Борлакова Ф.М. Травяная растительность на выступе ледникового ложа троговой долины р. Теберды (Северный Кавказ).....	1
Иванченко А.М., Коновалов А.Н., Бессмертный И.В., Хованский А.Д., Латун В.В., Меринова Ю.Ю. Природный потенциал ландшафтов Ростовской области	4
Керимов А.М., Татаренко Н.В., Дахова О.О., Хучунаев Б.М., Куповых Г.В. Сезонный ход концентрации тяжелых металлов в твердых осадках на южном склоне Эльбруса (ледник Гарабаши).....	4
Кузнецова И.Д., Федоров Ю.А. Роль некоторых факторов в формировании потомства черноморско-азовской проходной сельди.....	2
Лагута А.А., Погорелов А.В. Трансформация Краснодарского водохранилища (1941–2018 гг.).....	3
Максимов Д.В. О туристском районировании территории России.....	1
Мисиров С.А., Беспалова Л.А., Магаева А.А., Беспалова Е.В. Исследование овражно-балочной сети южного берега Таганрогского залива с использованием беспилотных летательных аппаратов	4
Назаренко О.В. Изменение некоторых метеорологических показателей в условиях засушливой степи	4
Нурмагомедов Т.Н., Латышенко К.П., Сианисян Э.С. Исследование импеданса сульфатных подземных вод методом электрохимической спектроскопии	4
Нурмагомедов Т.Н., Сианисян Э.С. Электрохимический метод контроля растворения и выноса гипса в основаниях гидротехнических сооружений	2
Панов Б.Н., Спиридонова Е.О. Климатические изменения поля приземного атмосферного давления в Азово-Черноморском регионе (1960–2017 гг.).....	2
Панов Б.Н., Спиридонова Е.О., Жукова С.В. Роль атмосферной циркуляции в процессе устойчивых изменений солености вод Азовского моря.....	3
Пономарев В.С., Иванов К.С., Ерохин Ю.В. Вещественный состав базальтов и долеритов из доюрского основания Западно-Сибирской плиты (Верхнехудосейская площадь, ЯНАО).....	3
Решетняк О.С., Даниленко А.О., Косменко Л.С., Кондакова М.Ю. Тенденции изменчивости химического состава речных вод Западно-Сибирской части Арктической зоны России	3
Решетняк О.С., Кондакова М.Ю., Даниленко А.О., Косменко Л.С., Решетняк В.Н. Тенденции изменчивости химического состава речных вод европейской части арктической зоны России.....	1
Склярченко Г.Ю., Закруткин В.Е. Подземные воды Ростовской области: факторы загрязнения и оценка качества	4
Скрипка Г.И., Ивлиева О.В., Беспалова Л.А., Сердюк Л.В., Калиманов Т.А. Мониторинг эрозионных процессов водоохранной зоны Цимлянского водохранилища с помощью программно-аппаратного комплекса	3

Сухоносенко Д.С. Анализ пространственной динамики загрязнения почв тяжелыми металлами в пределах селитебной зоны города Михайловка.....	3
Табунщик В.А., Петлюкова Е.А. Густота расчленения рельефа на территории Крымского полуострова ..	1
Хардинов А.Э. Отражение низкотемпературного метаморфизма в геохимических полях золотомещающих толщ Верхояно-Колымской складчатой области.....	2

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Bittirova A.A., Kumysheva J.A., Vologirov A.S., Mirzoeva A.A., Mirzoeva N.M., Bittirov A.M. Cestodes of the <i>Taeniidae</i> Family (Ludwig, 1886) as a Sanitary-Hygienic and Epidemic Threat to the of Biosphere Territories of Elbrus.....	2
Вардун В.М., Колесников С.И., Тимошенко А.Н., Казеев К.Ш., Акименко Ю.В. Влияние наночастиц Al_2O_3 , TiO_2 , Fe_2O_3 и SiO_2 на биологическое состояние чернозема обыкновенного	3
Гончарова О.А. Интродукция кавказских видов рода <i>Sorbus</i> L. на Кольском полуострове	1
Давд Р.М., Колесников С.И., Кузина А.А., Казеев К.Ш., Акименко Ю.В. Влияние модельного загрязнения селеном на биологические свойства аридных почв юга России.....	2
Кит О.И., Котиева И.М., Франциянц Е.М., Каплиева И.В., Трепятаки Л.К., Бандовкина В.А., Нескубина И.В., Сурикова Е.И., Черярина Н.Д., Погорелова Ю.А., Немайкалова Л.А. Влияние хронической нейропатической боли на течение злокачественного процесса меланомы B16/F10 у самцов мышей	1
Кит О.И., Шихлярова А.И., Франциянц Е.М., Нескубина И.В., Каплиева И.В., Гончарова А.С., Непомнящая Е.М., Шульгина О.Г. Процессы самоорганизации митохондрий при росте экспериментальных опухолей в условиях хронической нейрогенной боли.....	2
Тимошенко А.Н., Колесников С.И., Казеев К.Ш., Акименко Ю.В. Изменение биологических показателей серопесков после загрязнения наночастицами Cu, Zn и Ni.....	2
Франциянц Е.М., Кит О.И., Котиева И.М., Каплиева И.В., Козлова Л.С., Бандовкина В.А., Трепятаки Л.К., Погорелова Ю.А., Розенко Л.Я. Тканевая система регуляции плазминогена в динамике меланомы кожи у мышей-самцов, воспроизведенной на фоне хронической боли	1

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Юрий Анатольевич Устинов (85 лет со дня рождения).....	4
--	---

К 100-ЛЕТИЮ Ю.А. ЖДАНОВА

Бабешко В.А. Юрий Андреевич Жданов – выдающийся ученый, философ и созидатель	3
---	---

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ватульян А.О., Карякин М.И., Назаров А.А. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 19–25 августа 2019 г.)	3
Карапетянц А.Н. IX Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX (ОТНА- 2019)» (Ростов-на-Дону, 21–26 апреля 2019 г.)	2
Карапетянц А.Н., Пичугина О.А. III Международная Кавказская математическая конференция (Ростов-на-Дону, 26–29 августа 2019 г.)	3
Миноранский В.А. VIII Донской экологический фестиваль «Воспетая степь».....	2
Онищенко В.В., Закруткин В.Е., Решетняк О.С. Международная научная конференция «Актуальные направления сбалансированного развития горных территорий в контексте междисциплинарного подхода» (Караचाевск, 27–29 сентября 2019 г.)	4

ЗАМЕТКИ О КНИГАХ

Сианисян Э.С., Прозорова Г.Н. Книга ста гипотез (Тимофеев Д.Н. Природа космических тел Солнечной системы. Железногорск: Космическая технология, 2018. 225 с.).....	2
---	---

**НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ И ПРИКЛАДНОЙ ЖУРНАЛ
«ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»**

Рецензируемый журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» продолжает приём работ. Он имеет статус центрального издания и включён в перечень ВАК по следующим отраслям:

- физико-математические науки (математика, механика);
- науки о Земле.

Принимаются работы и по другим отраслям науки. Также печатаются материалы в разделах «Заметки о книгах»; «Научная жизнь»; «Штрихи к портрету».

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. С электронной версией можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7362. Опубликованные статьи индексируются в российских и международных электронных библиотеках и наукометрических базах данных: РИНЦ (RSCI), РУКОНТ, «Киберленинка», ЭБС «Университетская библиотека онлайн», Ulrich, EBSCO, Chemical Abstracts.

Авторы, сохраняя за собой авторские права на работу и передавая журналу «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» право первой публикации, автоматически принимают на себя обязательство не печатать её ни полностью, ни частично в каком-либо издании без указания ссылки на оригинальную публикацию в этом журнале.

Издательские услуги оплачиваются организацией или автором после утверждения статьи на редколлегии.

Оформление работ осуществляется согласно правилам:

1. Представляется статья в электронном виде. После заголовка указать индекс УДК.
2. Текст должен быть набран в редакторе MicroSoft Office Word 2000, 2003, 2007, 2010, 2016 через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman, размером 14 пт, страницы пронумерованы.
3. Сопроводительное или рекомендательное письмо, если статья представляется от организации. Экспертное заключение.
4. Полное название организации и её адрес на русском и английском языках.
5. Сведения об авторах с указанием адреса, по которому будет вестись переписка, на русском и английском языках.
6. Название статьи и фамилии авторов на русском и английском языках.
7. Аннотации на русском и английском языках (1000–1500 знаков / 150–200 слов).
8. Ключевые слова на русском и английском языках (8–10 слов).

Журнал распространяется по подписке – через ОАО «Роспечать». Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие). В неподписной период отдельные номера журнала за нынешний и прошлые годы можно приобрести в редакции.

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ, редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Тел./факс главной редакции (863) 218-40-00 добавочный 11-093, 11-094.

E-mail: izvestiya@sfedu.ru

Адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru